Fiche 2

Rappel. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidean, A une partie de E. L'orthogonal de A est l'ensemble, noté $A^\perp$, consitué de vecteurs de E ortogonaux à tous les vecteurs de A : $A^\perp = \{x \in E | \ \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$.

Exercice 1. (Gram-Schmidt, exemples).

1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.
   (a) Trouver une base orthonormée pour le plan $(2, -3, 6)^\perp$.
   (b) Montrer que (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Trouver une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que e_1 soit colinéaire à u_1, et que le plan engendré par e_1 et e_2 soit égal à celui engendré par u_1, u_2.
2. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3.
   (a) Montrer que l'application $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $b(P, Q) \longmapsto \int_{-2}^{2} P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
   (b) En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, construire à partir de $(1, X, X^2, X^3)$ une base orthonormée.

Exercice 2. (Calcul d'orthogonaux)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on définit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = {}^tXAY$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer une base pour chacun des orthogonaux de $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et de $X = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 3.

On considère le vecteur $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice P_1 de la projection orthogonale sur $\mathbf{a}$ et la matrice P_2 de la projection orthogonale sur un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{a}$.
2. Calculer $P_1 + P_2$ et P_1P_2. Expliquer les resultats obtenus.

Exercice 4.

Déterminer la projection orthogonale du point $b = (2, 4, 4)$ sur la droite D passant par l'origine et parallele au vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de b à D.

Exercice 5.

Déterminer dans $\mathbb{R}^n$ l'angle du vecteur ${}^t(1, 1, ..., 1)$ avec les axes. Déterminer la matrice P de la projection orthogonale sur ce vecteur.

Exercice 6.

On se donne $v_1 = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F, projecteur orthogonal sur F, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base B pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.
3. Déterminer toutes les bases de R^3 pour lesquelles la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.

Exercice 7.

Déterminer la matrice de la projection ortogonale de $\mathbb{R}^3$ sur l'intersection des plans d'équation $x + y + z = 0$ et $x - z = 0$.

Exercice 8.

Déterminer la solution $\hat{x}$ des moindres carrés des équations $3x = 10$ et $4x = 5$. Vérifier que l'erreur commise est un vecteur orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.

Déterminer la matrice de la projection sur le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.

Soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $a_1 = {}^t(1, 1, 0, 1)$ et $a_2 = {}^t(0, 0, 1, 0)$. Déterminer :

1. une base de supplementaire orthogonal $V^\perp$,
2. la matrice P de la projection orthogonale sur V,
3. le vecteur V de $V^\perp$, le plus proche du vecteur $b = {}^t(0, 1, 0, -1)$

Exercice 11.

Dans $\mathbb{R}^6$ soit $H = \{(x_1, \cdots, x_6) \in \mathbb{R}^6 | \ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$ puis la distance entre $u = {}^t(1, -1, 0, 2, 4, 0)$ et H.

Exercice 12. Hyperplan.

Un hyperplan dans l'espace vectoriel E c'est un sous-espace de E tel que sa dimension est égale à $(\dim E - 1)$.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$< a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

On note H l'hyperplan suivant : $H = \{P(X) \in E | \ P(1) = 0\}$

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H puis la distance de X à H.

Exercice 13. (La géométrie des matrices)

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant : $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \ \phi(A, B) = tr(A\ {}^tB)$

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée pour le sous-espace S des matrices symétriques.

3. Écrire une matrice arbitraire de E comme combinaison linéaire de ses coordonnées dans S et $S^{\perp}$.

(d) Déterminer la distance d'une matrice arbitraire de E à S.

4. On fixe la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Déterminer une base orthonormée pour $A^{\perp}$.

(f) Déterminer pour une matrice arbitraire de E sa projection orthogonale sur $A^{\perp}$.

Exercice 14. (La géométrie des polynômes)

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des polynômes de degré au plus 3, à coefficients réels. On munit E du produit scalaire suivant :

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3\rangle \ = \ a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \ .$$

On définit $H = \{P \in E : P(1) = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3.
2. Déterminer une base orthonormée de H.
3. Déduire du point précédent la projection orthogonale de X sur H. Compléter la base que vous avez déterminée dans le point précédent à une base de E de votre choix, et écrire la matrice de la projection orthogonale sur H dans cette base.
4. Déterminer la distance d'un polynôme de E à H en fonction de ses coefficients.

Exercice 15.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \cdots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$< P, Q >= \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier qu'avec cette application, E est muni d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormé de E.
3. Pour $Q \in E$ quelconque, déterminer la distance de Q à $H = \{P \in E | \sum_{i=1}^{n} P(a_i) = 0\}$

Exercice 16.

Dans $Mat_n(\mathbb{R})$ on note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectioriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques. On muni $Mat_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $< M, N >= \sum_{i,j} m_{ij}n_{ij}$ où m_{ij} sont des coefficients de M et n_{ij} sont ceux de N.

1. Vérifier que pour $M, N \in Mat_n(\mathbb{R})$, $< M, N >= \mathrm{tr}({}^tM \cdot N)$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Remarquer que $< {}^tS, {}^tA >=< S, A >$. En déduire que $< S, A >= 0$.
3. Déduire de la question précédente que $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}^{\perp}$ puis que $\mathcal{S} = \mathcal{A}^{\perp}$.
4. On conclut alors que $Mat_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$. Soit $M \in Mat_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique $S \in \mathcal{S}$ et l'unique $A \in \mathcal{A}$ en fonction de M telles que $M = S + A$.
5. Dans $Mat_2(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre M et $\mathcal{S}$, la distance entre M et $\mathcal{A}$, puis entre $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.