

Fiche 1

Exercice 1 (Changement de base $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.) Soit $E = \mathbb{R}^2$ avec la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. Pour deux vecteurs arbitraires $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ on définit une forme bilinéaire β par la formule $\beta(U, V) = aa' + 2ab' + 4a'b + 5bb'$. Soit \mathcal{B}' une base formée de vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter M , la matrice de β dans la base canonique \mathcal{B} .
2. Calculer la matrice de la forme β dans la base \mathcal{B}' de deux façons différentes :
 - (a) en multipliant les vecteurs f_i et f_j pour tous $i, j \in \{1, 2\}$;
 - (b) en calculant la matrice de passage P de la base canonique vers la base \mathcal{B}' et en utilisant la formule $M' = {}^tPMP$.
 - (c) Décomposer la matrice M en somme de la matrice symétrique et antisymétrique. Présenter la forme bilinéaire β comme la somme de la forme bilinéaire symétrique et de la forme bilinéaire anti-symétrique.

Exercice 2 (Changement de base $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.) Soit $E = \mathbb{R}^3$ avec la base canonique. Pour deux vecteurs arbitraires $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ on définit une forme bilinéaire ϕ par la formule $\phi(v_1, v_2) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$. Soit M la matrice de la forme bilinéaire ϕ dans la base canonique (expliciter !)

Soit B une base formée de vecteurs $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calculer la matrice de la forme ϕ dans cette base B de deux façons différentes :

1. en multipliant les vecteurs h_i et h_j pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$;
2. en calculant la matrice de passage C de la base canonique vers la base B et en utilisant la formule $M' = {}^tCMC$.

Exercice 3 (Matrice orthogonale) Soit E un espace réel de dimension fini n et $\mathcal{B}_e = \{e_i\}$ et $\mathcal{B}_f = \{f_i\}, i \in \{1, \dots, n\}$ deux bases de cet espace. Soit C la matrice de passage de \mathcal{B}_e vers \mathcal{B}_f .

1. Soit A une matrice d'une application linéaire $\phi : E \rightarrow E$ dans la base \mathcal{B}_e . Exprimer la matrice de ϕ dans la base \mathcal{B}_f en fonction de A et C . Notons la A' .
2. On considère la forme bilinéaire $\beta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par la même matrice A dans la base \mathcal{B}_e . Exprimer la matrice de β dans la base \mathcal{B}_f en fonction de A et C . Notons la A'' .
3. Remarquer que si $C^tC = I$, (I - la matrice d'identité), on a $A' = A''$. Soient $(c_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ -

les entrées de la matrice C . On considère les vecteurs $c_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \dots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$. Soit $C^{-1} = {}^tC$.

- (a) Montrer que : **a.** $c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \dots + c_{ni}^2 = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$,
- b.** $c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \dots + c_{ni}c_{nj} = 0$, si $i \neq j$, **c.** $|c_{ij}| \leq 1, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.

(b) Que peut-on dire sur l'ensemble de vecteurs c_i , $i \in \{1, \dots, n\}$?

(c) Trouver les conditions similaires aux **a.** et **b.** sur les entrées des vecteurs $d_i = \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \dots \\ c_{in} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Produit scalaire : exemples élémentaires)

1. Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?

(a) L'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $xx' + yy' + xy' + yx'$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.

(b) L'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $2xx' + 3yy' + 2xy' + 2x'y$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.

(c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit E l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On définit $\beta : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ par $\beta(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

2. Quelles sont les conditions sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que l'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\beta((x, y), (x', y')) = axx' + 2bxy' + 2bx'y + byy'$ soit un produit scalaire.

3. On notera V les nombres complexes que l'on verra comme un \mathbb{R} -espace vectoriel. Vérifier que $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque paire de nombres complexes (α, β) associe $\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})$ est un produit scalaire.

Exercice 5 (D'autres exemples, orthogonalité) Les applications suivantes définissent-elles des produits scalaires sur les espaces vectoriels considérés ? Si oui, (et lorsque cela a un sens) préciser si la base canonique de l'espace vectoriel considéré est orthogonale pour ce produit scalaire.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application ψ définie sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \psi(A, B) = \operatorname{Tr}({}^tAB).$$

3. On note $E = \mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R})$ et on considère l'application définie par

$$\forall f, g \in E, \quad b(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt.$$

Exercice 6 (Cauchy-Schwarz) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer pour tout $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ on a $\left(\int_a^b |f(t)|dt\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(t)^2 dt$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 7 (Cauchy-Schwarz) Soient A et B deux matrices $n \times n$ symétriques. En choisissant un produit scalaire sur l'espace des matrices $n \times n$ montrer que $(\operatorname{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\operatorname{tr}A^2 \cdot \operatorname{tr}B^2$.

Exercice 8 (Caractérisation d'un produit scalaire)

1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire. Montrer les trois formules de polarisations :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Montrer que $\| \cdot \|$ vérifie l'identité du parallélogramme, i.e.

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une norme $\| \cdot \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on pose $\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.
 - (a) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ et $\varphi(x, x) = \|x\|^2$.
 - (b) Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, 2y) = 2\varphi(x, y)$. Indication : démarrer avec $\|x + 2y\|^2 + \|x\|^2$.
 - (c) Montrer que pour tous $x, y, z \in E$, $\varphi(x + z, y) = \varphi(x, y) + \varphi(z, y)$.
 - (d) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, pour tous $x, y \in E$, $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$. Montrer que ceci est encore vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - (e) En déduire que toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est induite par un produit scalaire.
3. Montrer que la norme $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$ sur \mathbb{R}^2 n'est pas associée à un produit scalaire.

Exercice 9 (Produits scalaires complexes, les matrices)

1. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t\bar{A} \cdot B)$ est un produit scalaire.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Montrer que $\langle A, B \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \bar{a}_{ij} \cdot b_{ij}$.

Exercice 10 (Produits scalaires complexes, les polynômes) Soit $\varphi : \mathbb{C}[X]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien.
 2. Montrer que la base canonique de $\mathbb{C}[X]$ est une base orthonormée.
- Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.
3. Calculer $\|Q\|^2$ en fonction des a_i .
 4. Soit $M = \sup\{|Q(z)| ; z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
Montrer que $M \geq 1$ et que : $M = 1$ if and only if $Q = X^n$.

Exercice 11 (Des complexes aux réels) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = \text{Re}(\langle x, y \rangle)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E .

Exercice 12 (Produit scalaire, bases) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont la diagonale est constituée de a_1, \dots, a_n . Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X, Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$. Notez que φ est à valeurs dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mais on identifie ce dernier à \mathbb{R} par un abus de notations.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que φ soit un produit scalaire.
2. Sous cette condition, montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ est une base orthogonale.
3. Toujours sous la même condition, déterminer une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

Exercice 13 (Familles indépendantes infinies) On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel : $\forall f, g \in E$, $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $h_n : t \in [0; 1] \mapsto \cos(2\pi nt)$.

1. Montrer que la famille d'applications $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.