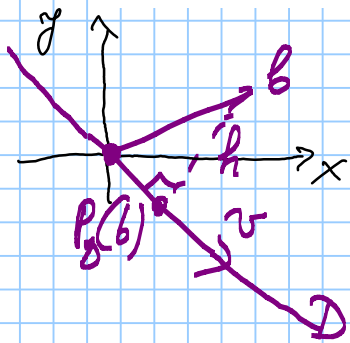


Alg - Géom. DM 1 Corrigé

Exercice 1.

Déterminer la projection orthogonale du point $b = (-2, 3, 4)$ sur la droite D passant par l'origine de vecteur-directeur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de b à D .



Rappel: On cherche un pt. $P_D(b)$ sur la droite D t.q. le vecteur

$P_D(b)$ soit orthogonal à $h = b - P_D(b)$

donc $\langle P_D(b), (b - P_D(b)) \rangle = 0$ et \uparrow ou comme vecteur

$P_D(b)$ appartient à la droite donc est un multiple de v : $P_D(b) = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche

x t.q. $\langle x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \rangle = 0$ si on se rappelle de cela on peut commencer directement ici:

$$\text{donc } x = \frac{(1, -1, 1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{(1, -1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{3} \cdot (-2 - 3 + 4) = -\frac{1}{3}$$

$$P_D(b) = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ le pt } \boxed{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$$

La distance entre $(-2, 3, 4)$ et $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$$\text{est } \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(-2 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{3} \sqrt{25 + 64 + 189} = \boxed{\frac{\sqrt{258}}{3}}$$

Exercice 2.

On se donne $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans \mathbb{R}^3 . Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F , projecteur orthogonal sur F , dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Donner une base B pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 0)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors ${}^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1) on utilise la formule de projecteur :

$$P_F = A ({}^T A A)^{-1} {}^T A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ on utilise } \begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

pour calculer $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{25-4} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$P_F = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -1 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 8 & 17 & -2 \\ 4 & -2 & 20 \end{pmatrix}}$$

2) Pour avoir une base demandée il faut que les deux premiers vect. forment une base

dans F , et le troisième soit être dans F^\perp . On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme deux premiers vecteurs par exemple et le troisième de sorte qu'il est orthogonal à v_1 et v_2

Soit $v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ce vecteur doit satisfaire :

$$\begin{cases} \langle v_1, v_3 \rangle = 0 \\ \langle v_2, v_3 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \text{ par exemple, } \begin{matrix} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 3.

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$$\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \phi(A, B) = \text{tr}(A {}^t B).$$

On considère le sous-espace S des matrices symétriques :

$$S = \{M \in E \mid {}^t M = M\}.$$

Le sous-espace orthogonale de S est l'espace des matrices anti-symétriques

$$S^\perp = \{M \in E \mid {}^t M = -M\}.$$

Trouver les projections de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sur S et S^\perp .

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est alors l'espace euclidien. Comme $S + S^\perp = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il nous faut une décomposition de A en somme $B + C$ où ${}^t B = B$ et on cherche alors B et C . ${}^t C = -C$

Les matrices de S sont de type $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = B$

et ceux de S^\perp : $\begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} = C$

$$\text{Donc } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c+d \\ c-d & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c+d = -3 \\ c-d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ d = -2 \end{cases} \text{ donc } \boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\text{et } \boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ce sont des projecteurs sur S et S^\perp resp.