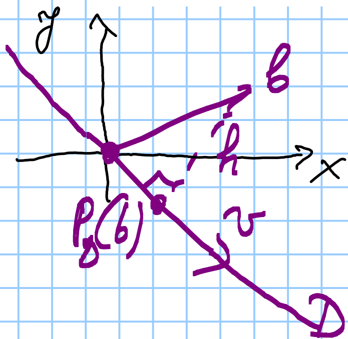
alg-Géom. DM 1 Corrigé.

Exercice 1.

Déterminer la projection orthogonale du point $b = (-2, 3, 4)$ sur la droite D passant par l'origine de vecteur-dirécteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de b à D.



Rappel: On cherche un pt. $P_D(b)$ sur la droite D t.q. le vecteur $P_D(b)$ soit orthogonal à $h = b - P_D(b)$

vu comme vecteur

Donc $\langle P_D(b), (b - P_D(b)) \rangle = 0$ et

$P_D(b)$ appartient à la droite donc est un multiple de v: $P_D(b) = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche

x t.q. $\left\langle x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\rangle = 0$

Si on se rappel de cela on peut commencer directement ici:

Donc $x = \dfrac{(1, -1, 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{(1, -1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \dfrac{1}{3} (-2 - 3 + 4) = -\dfrac{1}{3}$

$P_D(b) = -\dfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ le pt $\boxed{\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$

La distance entre $(-2, 3, 4)$ et $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

est $\left\| (-2, 3, 4) - \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\| = \sqrt{\left(-2 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{3}\right)^2}$

$= \dfrac{1}{3} \sqrt{25 + 64 + 169} = \boxed{\dfrac{\sqrt{258}}{3}}$

Exercice 2.

On se donne $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F, projecteur orthogonal sur F, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base B pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors ${}^T\!A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1) On utilise la formule de projecteur :

$$P_F = A\,({}^tA\,A)^{-1}\,{}^tA$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&-2\\-2&5\end{pmatrix}$$ On utilise la formule $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

pour calculer $\begin{pmatrix}5&-2\\-2&5\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{25-4}\begin{pmatrix}5&2\\2&5\end{pmatrix}$

$$P_F=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}5&2\\8&-1\\4&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix}=\boxed{\frac{1}{21}\begin{pmatrix}5&8&4\\8&17&-2\\4&-2&20\end{pmatrix}}$$

2) Pour avoir une base demandé il faut que les deux premiers vect. forment une base orthogonale dans F et le troisième est leur orthogonale.

Par exemple : Gram-Schmidt de $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \text{ et } \tilde{e}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix},e_1\right\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle}e_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}-\frac{(0\ -1\ 2)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}{(1\ 2\ 0)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}+\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5\\-1/5\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix},$$ à une const. près on prend $\boxed{e_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}}$

et e_3 doit être orthogonal. Donc on choisit un vecteur $v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ qui $\underbrace{\text{n'est pas}}_{\text{évidement}}$ dans F et on le Gram-Schmidt.

$$e_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_1\right\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle}e_1-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2\right\rangle}{\langle e_2,e_2\rangle}e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{2^2+1+10^2}\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{5\cdot 21}\begin{pmatrix}4\\-2\\20\end{pmatrix}=\frac{1}{5\cdot 21}\begin{pmatrix}5\cdot 21-21-4\\-42+2\\20\end{pmatrix}=\frac{1}{5\cdot 21}\begin{pmatrix}80\\-40\\-20\end{pmatrix}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}16\\-8\\-4\end{pmatrix}$$

Pour simplifier : il nous faut une base orthog. avec les deux premiers vecteurs dans F.

Par exemple : $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Exercice 3.

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$$\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},\ \phi(A, B) = tr(A\,{}^tB).$$

On considère le sous-espace S des matrices symétriques :

$$S = \{M \in E \mid {}^tM = M\}.$$

Le sous-espace orthogonale de S est l'espace des matrices anti-symétriques

$$S^{\perp} = \{M \in E \mid {}^tM = -M\}.$$

Trouver les projections de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sur S et $S^{\perp}$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est alors l'espace euclidien. Comme $S + S^{\perp} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il nous faut une décomposition de A en somme $B + C$ où ${}^TB = B$ et ${}^TC = -C$

On cherche alors B et C.

Les matrices de S sont de type $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = B$

et ceux de $S^{\perp}$: $\begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} = C$

Donc $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c+d \\ c-d & b \end{pmatrix}$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c + d = -3 \\ c - d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ d = -2 \end{cases}$ Donc $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$

Ce sont les projections sur S et $S^{\perp}$ resp.