Université Claude Bernard (Lyon 1) 2019-2020 Printemps
UE MathIV Algèbre Géométrique L2

Devoir Maison 3

À déposer sur tomuss avant 8 mai

Exercice 1. (Décomposition polaire)
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est la suivante

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le but de cet exercice est de donner la décomposition polaire de cette matrice. Pour cela

1. On considère le produit ${}^tTT$. Sans calcul que peut-on dire sur les valeurs propres et les espaces propres de ${}^tTT$?
2. Calculer les valeurs propres de ${}^tTT$?
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de ${}^tTT$. On désigne cette base par $\mathcal{B}$.
4. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Calculer l'inverse de P.
5. Diagonaliser ${}^tTT$.
6. Trouver S - la matrice symétrique définie positive, telle que $S^2 = {}^tTT$.
7. Trouver la matrice R telle que $RS = T$. Remarque : la matrice de R a que trois coefficients non-nuls.
8. Pour la matrice orthogonale R :
   (a) Calculer les valeurs propres de R.
   (b) Décrire les sous-espaces invariants sous l'action de R.
   (c) Est-ce que R est une rotation, une reflexion, les deux ?