Algèbre IV - DM3

Timothée Huneau

Exercice 1. Décomposition polaire

1.

La matrice $\theta = {}^tTT$ est symétrique : en effet, ${}^t({}^tTT) = {}^tT\,{}^t({}^tT) = {}^tTT$. On peux même voir qu'elle est positive : si on prend $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \neq 0$, on a ${}^tX\theta X = {}^t(TX)TX = \langle TX, TX\rangle \geq 0$. Elle est également définie : en développant sur la 3$^\text{e}$ colonne, on trouve que $\det T = 150$, donc $T \in GL_3(\mathbb{R})$, donc $\langle TX, TX\rangle = 0 \iff TX = 0 \iff X = 0$. θ est donc symétrique positive définie.

Puisqu'elle est symétrique, d'après le théorème spectral, on sait qu'elle est diagonalisable dans une base de vecteurs orthogonaux, donc que ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Puisqu'elle est définie positive, ses valeurs propres sont strictement positives.

2.

En calculant θ explicitement, on trouve :

$$\theta = \begin{pmatrix} 125 & 50 & 0 \\ 50 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\begin{aligned} P_\theta &= \begin{vmatrix} 125-X & 50 & 0 \\ 50 & 200-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} 200-X & 50 \\ 50 & 125-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)([200-X][125-X]-2500) \\ &= (1-X)(22500-325X+X^2) \\ &= (1-X)(100-X)(225-X) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de θ sont donc 1, 100 et 225.

3.

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. On remarque que $\theta e_3 = e_3$, le vecteur e_3 est donc vecteur propre, associé à la valeur propre 1. Il est déjà normé. On pose donc $f_3 = e_3$.

On cherche l'espace propre pour 100. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\theta X = 100X &\iff \left\{ \begin{array}{rl} 125 + 50y & = 100x \\ 50x + 200y & = 100y \\ z & = 100z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2y \\ z & = 0 \end{array} \right. \\
&\iff X \in \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

On prend un tel X. On veut qu'il soit normé, donc que $\langle X, X \rangle = 1$, donc que $x^2 + 0 + 4x^2 = 5x^2 = 1$, donc $x = 1/\sqrt{5}$. On choisit donc $f_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

On pourrait répéter le même processus pour f_3, mais on va plutôt utiliser le fait que les vecteurs propres de θ sont orthogonaux ; il suffi donc de résoudre, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \langle f_1, X \rangle = 0 \\ \langle f_2, X \rangle = 0 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ y - 2x = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 2x \end{array} \right. \\
&\iff X \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

On veut toujours que f_2 soit normé, donc on prend $f_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ et on vérifie bien que $\theta f_3 = 225 f_3$

On a finalement :

$$\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$$

4.

La matrice P est obtenue par concaténation des vecteurs de $\mathcal{B}$. On a donc :

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Puisque θ est symétrique, une matrice de diagonalisation est orthogonale, donc nécessairement, $P^{-1} = {}^tP$.

5.

Sans faire de calcul, on sait que lorsque θ est diagonalisée, elle comporte ses valeurs propres sur sa diagonale, dans le même ordre que les vecteurs propres associés dans la base de diagonalisation. Dans notre cas, étant donnée $\mathcal{B}$, on sait que :

$$D = P^{-1}\theta P = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 225 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.

On a donc que $\theta = PD\,{}^tP$. Si on trouve σ symétrique définie positive telle que $\sigma^2 = D$, on aura alors $\theta = (P\sigma\,{}^tP)^2$, avec $S = P\sigma\,{}^tP$ symétrique définie positive.

C'est facile : toutes les matrices $\varsigma = \begin{pmatrix} \pm 10 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 15 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ sont symétriques, avec leurs valeurs propres sur la diagonale. Il suffit de prendre celle où toutes sont positives pour avoir une matrice définie positive $\sigma = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il ne reste plus qu'à calculer S explicitement. On peut fait le calcul suivant (on peut faire le calcul par blocs) :

$$S = P\sigma\,{}^tP = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 2 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve bien que $S^2 = \theta$.

7.

On a donc vu que $S = P\sigma P^{-1}$. On cherche R telle que $RS = T$. On a donc $R = TS^{-1} = T(P\sigma P)^{-1} = TP\sigma^{-1}P^{-1}$. L'inverse de σ est facile à trouver :

c'est la matrice diagonale dont les coefficients sont les inverses des coefficients diagonaux de σ. Il ne reste plus qu'à faire le calcul :

$$\begin{aligned}
R &= TP\sigma^{-1}P^{-1} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

8.

(a)

En remarquant $R\,{}^tR = I_3$, on conclut que R est orthogonale, ses valeurs propres sont donc de module 1. Son polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned}
P_R &= \begin{vmatrix} -X & -1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ -1 & 0 & -X \end{vmatrix} \\
&= 1 - X^3 && \text{(dev. sur } C_1\text{)} \\
&= (1-X)(1+X+X^2) \\
&= (1-X)(j-X)(j^2-X) && (j = e^{\frac{2i\pi}{3}})
\end{aligned}$$

(b)

Elle est donc $\mathbb{C}$-diagonalisable (puisque P_R y est scindé à racines simples), mais pas $\mathbb{R}$-diagonalisable. Sur $\mathbb{R}$, on peut au mieux la mettre, dans une base bien trouvée, sous la forme d'une matrice diagonale par blocs de taille au plus 2 ; ici, le premier étant simplement 1 [1], le second étant un bloc taille 2 et de polynôme caractéristique $U_2 = 1 + X + X^2$.

Plus précisément, les racines de U_2 étant j et $j^2 = \bar{j}$ on peut mettre ce bloc sous la forme $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Il ne reste plus qu'à trouver la base permettant de le faire. Commençons simplement par la droite qui est préservée. On cherche donc $u_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ tel que $Ru = u$.

[1]. Une matrice 1×1 de polynôme caractéristique $1 - X$.

On résout donc :

$$
\begin{aligned}
Ru = u &\iff \left\{\begin{array}{l} -u_2 = u_1 \\ u_3 = u_2 \\ -u_1 = u_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} u_1 = u_1 \\ u_2 = -u_1 \\ u_3 = -u_1 \end{array}\right. \\
&\iff u \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

On pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On sait que R est orthogonale et que R', sa version diagonale par blocs, l'est aussi, la matrice de passage de l'une à l'autre est donc également orthogonale (puisque $\mathcal{O}_3$ est un groupe). Le plan invariant par R est donc orthogonal à u. On en déduit qu'une base orthogonale $(v, w) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ de ce plan vérifie :

l'éq du plan est $(1,-1,-1)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ ou bien $\boxed{x - y - z = 0}$

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \langle u, v\rangle = 0 \\ \langle u, w\rangle = 0 \\ \langle v, w\rangle = 0 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{l} v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\ w_1 - w_2 - w_3 = 0 \\ v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} v_1 = v_2 + v_3 \\ w_1 = w_2 + w_3 \\ v_2w_3 + v_3w_2 + 2v_2w_2 + 2v_3w_3 = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

On fixe $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ et $v_3 = -1$. Le système d'équations devient :

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} w_1 = w_2 + w_3 \\ v_2w_3 + v_3w_2 + 2v_2w_2 + 2v_3w_3 = 0 \end{array}\right. &\iff \left\{\begin{array}{l} w_1 = w_2 + w_3 \\ w_3 - w_2 + 2w_2 - 2w_3 = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} w_1 = w_2 + w_3 \\ w_2 = w_3 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

On fixe donc $w_1 = -2$, $w_2 = 1$ et $w_3 = 1$.

(c)

R étant une matrice orthogonale invariante sur un plan [2], c'est une rotation. Puisqu'elle n'admet pas -1 comme valeur propre, elle n'est en aucun cas une réflexion. Puisque $R^3 = I_3$ et $Ru_1 = u_1$, c'est une rotation d'un tiers de tour sur l'axe u_1.

[2]. mais aucun sous espace de ce plan ne l'est