Exercice 1. (Décomposition polaire)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est la suivante

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le but de cet exercice est de donner la décomposition polaire de cette matrice. Pour cela

1. On considère le produit ${}^tTT$. Sans calcul que peut-on dire sur les valeurs propres et les espaces propres de ${}^tTT$?
2. Calculer les valeurs propres de ${}^tTT$?
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de ${}^tTT$. On désigne cette base par $\mathcal{B}$.
4. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Calculer l'inverse de P.
5. Diagonaliser ${}^tTT$.
6. Trouver S - la matrice symétrique définie positive, telle que $S^2 = {}^tTT$.
7. Trouver la matrice R telle que $RS = T$. Remarque : la matrice de R a que trois coefficients non-nuls.
8. Pour la matrice orthogonale R :
   (a) Calculer les valeurs propres de R.
   (b) Décrire les sous-espaces invariants sous l'action de R.
   (c) Est-ce que R est une rotation, une reflexion, les deux ?

1. $${}^TT\cdot T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 11 \\ -14 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 11 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 50 & 0 \\ 50 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique :

Positive : soit λ valeur propre de ${}^TT\cdot T$ et v - vect. propre corresp. $\langle {}^TTTv, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$ mais aussi $\langle {}^TTTv, v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle \geq 0$ par les propriété de positivité du produit scalaire : $\forall x \ \langle x, x\rangle \geq 0$. Donc $\lambda\langle v, v\rangle \geq 0$ avec $\langle v, v\rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$

Défini : $\det T = 150 \neq 0 \Rightarrow \det {}^TT\cdot T \neq 0$ et 0 n'est pas une valeur propre.

On dit que toutes les valeurs propres de ${}^TT\,T$ sont alors positives

2. Valeurs propres de ${}^TT\,T$:

$$\det\begin{pmatrix} 125-\lambda & 50 & 0 \\ 50 & 200-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left((125-\lambda)(200-\lambda) - 2500\right)$$
$$= -(\lambda - 1)(\lambda - 100)(\lambda - 225)$$

Alors les valeurs propres de ${}^TT\,T$ sont

$\mathrm{Sp}\ {}^tT\,T = \{1, 100, 225\}$

3. Base de vecteurs propres:

$\underline{\lambda = 1}$ $\begin{pmatrix} 124 & 50 & 0 \\ 50 & 199 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^t$

comme vecteur propre, normalisé : $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 100}$ $\begin{pmatrix} 25 & 50 & 0 \\ 50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^t$

normalisé : $\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 225}$ $\begin{pmatrix} -100 & 50 & 0 \\ 50 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^t$

normalisé $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

4. $P = \begin{pmatrix} 0 & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'est une matrice orthogonale

donc $P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$

5. ${}^tT\,T = {}^tP\,D\,P = {}^tP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 225 \end{pmatrix} P$

6. $S^2 = {}^tT\,T \Rightarrow S = {}^tP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} P$ calcule donne

$S = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 0 \\ 2 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $R = TS^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -11 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/75 & -1/15 & 0 \\ -1/75 & 14/150 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. a) $\det(R - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \lambda^2 + 1 = 1 - \lambda^3$

$= (1-\lambda)\underbrace{(1 + \lambda + \lambda^2)}$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

b) Il y a deux espaces invariants

un correspondant à $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et l'autre - plan orthogonal $P \perp \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut alors écrire son équation:

$$-x + y + z = 0$$

c) $\det R = 1$ donc R est une rotation de l'axe

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le plan P.