Exercice 1. Une forme linéaire

On considère un élément ϕ dans $(\mathbb{R}^2)^*$, l'espace dual de $\mathbb{R}^2$ (= l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). On dit que ϕ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, car $\phi \in (\mathbb{R}^2)^*$ est caracterisé par les coefficients α, β de son action sur un vecteur quelconque :

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \alpha x + \beta y. \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \beta = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$$

Soient

$$\phi\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 2, \quad \phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -1. \quad (*)$$

1. Déterminer α, β pour décrire la forme linéaire ϕ.
2. Trouver le sous-espace annulé par ϕ, autrement dit le noyau de la forme linéaire $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
3. Ecrire l'équation de la droite orthogonale au noyau de ϕ. On note D cette droite et V son vecteur directeur unitaire (il y a en deux - on prend celui avec la coordonnée x positive.)
4. Trouver un élément ψ de $(\mathbb{R}^2)^*$, tel que $\psi(V) = 1$.
5. Montrer que (ϕ, ψ) forment une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.
6. Exprimer les formes linéaires suivantes dans la base (ϕ, ψ) :

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x, \quad h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x - 4y.$$

1 $\begin{cases} \alpha = \varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \beta = \varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{cases}$ alors on réécrit $(*)$ $\begin{cases} \varphi\left(\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right) = -\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + 2\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = 2 \\ \varphi\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (-1)\cdot\alpha + 2\beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha = -1 \end{cases}$ $\varphi\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = -x + \frac{1}{2}y$

2 $\operatorname{Ker}\varphi := \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \,\middle|\, \varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \,\middle|\, -x + \frac{1}{2}y = 0\right\}$

C'est une droite d'éqn. $-x + \frac{1}{2}y = 0$

Son vecteur-directeur est $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ - tout $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de cette droite est de forme $t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. On peut le noter $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$ ou bien $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}\right)$ si on choisi $\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$ comme vect.-directeur.

3 La droite $-x + \frac{1}{2}y = 0$ a pour vecteur normal $\begin{bmatrix}-1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

C'est un vecteur-directeur de D recherchée. Alors son vect. normale est par ex. $\begin{bmatrix}1/2\\1\end{bmatrix}$ et son éqn $\boxed{\frac{1}{2}x + y = 0}$

$V = \begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix} \Big/ \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-1/2\end{bmatrix}$, $\boxed{V = \begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}\\-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}}$

4 On cherche ψ, t.q. $\psi\left(\begin{bmatrix}2\sqrt{5}/5\\-\sqrt{5}/5\end{bmatrix}\right) = 1$ mais $\psi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = ax + by$

Il y a une infinité de choix de a et b qui donnent

$\psi\begin{pmatrix}2\sqrt{5}/5\\-\sqrt{5}/5\end{pmatrix} = a\cdot 2\sqrt{5}/5 + b\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 1$ Par ex $a = 0$, $b = -\sqrt{5}$

$\psi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = -\sqrt{5}\,y$ ou $a=\sqrt{5}$ et $b=\sqrt{5}$: $\psi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \sqrt{5}x+\sqrt{5}y$?

Pour voir qu'on a bien trouver ψ il faut verifier que notre φ en effet donne 1 pour $\begin{bmatrix}2\sqrt{5}/5\\-\sqrt{5}/5\end{bmatrix}$

5) L'espace $(\mathbb{R}^2)^*$ est un d espace de dim 2. car on a vu dans le 1.1 que $(\mathbb{R}^2)^*$ est défini par deux coeffs α,β. Pour avoir une base de $(\mathbb{R}^2)^*$ il suffit que φ et ψ ne soient pas proportionnel.

En effet, on a $\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = -x+\frac{1}{2}y$ et $\psi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = -\sqrt{5}y$ il ne sont pas proportionnels : il n'y a pas de A t.q. $\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = A\cdot\psi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$ pour $\forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

6) $\begin{cases}\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = -x+\frac{1}{2}y\\ \psi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = -\sqrt{5}\cdot y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = -1\\ \varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = +\frac{1}{2}\\ \psi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = 0\\ \psi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = -\sqrt{5}\end{cases}$

on cherche a et b t.q.

$g\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = a\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) + b\psi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = 2x$ (enoncé : $g\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = 2x$)

$$\begin{cases}2 = g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a\cdot\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+b\psi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = a(-1)+b\cdot 0\\ 0 = g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)+b\psi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot(-\sqrt{5})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$$

alors $\boxed{g = -2\varphi - \frac{\sqrt{5}}{5}\psi}$

Pour $h\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x-4y$ on a $\begin{cases}1 = a\cdot(-1)+b\cdot 0\\ -4 = a\cdot\frac{1}{2}+(-\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=\frac{7\sqrt{5}}{5}\end{cases}$

et $\boxed{h = -\varphi + \frac{7\sqrt{5}}{5}\psi}$

Bien sure la reponse depend de ψ choisi en 1.4.

Exercice 2. Endomorphisme orthogonal

Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathbf{End}(E)$ est un endomorphisme orthogonal

1. Rappeler la définition d'un endomorphisme orthogonal.
2. Parmi les nombres suivants lesquels peuvent être des valeurs propres de u :

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \boxed{\lambda_2 = i,} \quad \boxed{\lambda_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}},} \quad \lambda_4 = \cos\frac{2\pi}{3}, \quad \lambda_5 = 0, \quad \boxed{\lambda_6 = \cos\pi} \ ?$$ oui

Dans le cas de réponse négative expliquer brièvement la raison en une ou deux lignes. Dans le cas de réponse positive donner un exemple d'un endomorphisme orthogonal $u_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tel que λ_i soit une valeur propre de u_i.

1) Un endomorphisme orthogonal $u : E \to E$ est un endomorphisme qui preserve les normes $\|u(x)\| = \|x\|, \forall x \in E$. Une définition équivalente : $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall\, x, y \in E$ (on l'appel aussi isométrie)

2) Soit λ une valeur propre de u avec V un vect. propre : $u(V) = \lambda V$. On a $\langle u(V), u(V) \rangle = \langle \lambda V, \lambda V \rangle$. Si λ n'est pas réel (cela peut arriver dans le cas de polynôme non-scindé) on aura $\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle v, v \rangle$ - il faut utiliser semi-linéarité de produit scalaire même si E est réel ! $\langle u(V), u(V) \rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle V, V \rangle$, comme $\langle u(V), u(V) \rangle = \langle V, V \rangle$ on a $\boxed{\lambda\bar{\lambda} = 1}$ donc $\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5$ ne peuvent pas être les valeurs propres de u orthogonal

Pour $\lambda_6 = \cos\pi = -1$: par ex. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = i$ et $\lambda_3 = e^{2\pi i/3}$ on cherche les matrices 2×2 sous forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ t.q. $\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = 1$

λ - valeur propre $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)^2 + b^2 = 0$

$\lambda^2 - 2a\lambda + \underbrace{a^2 + b^2}_{1} = 0$, $\lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0$, donc $\boxed{\begin{cases} a = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} \\ b^2 = 1 - a^2 \end{cases}}$

Pour $\lambda_2 = i$ on a $\begin{cases} a = -1 \\ b = \pm 1 \end{cases}$ et la matrice $\boxed{\pm\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$

Pour $\lambda = e^{i\theta}$ on a $a = \frac{e^{2i\theta} + 1}{2e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$ et $b = \pm\sin\theta$

$\lambda_3 = e^{i\theta}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, la matrice $\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ ou sa transposé.

Exercice 3. Endomorphisme autoadjoint.
On considère **s** l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler la définition d'un automorphisme autoadjoint.
2. Justifier que **s** est autoadjoint.
3. Calculer les valeurs propres de A. On trouve que deux valeurs propres distincts de A.
4. Trouver une base orthonormée des vecteurs propres de A.
5. Justifier l'existence, puis expliciter une matrice P orthogonale pour laquelle $P^{-1}AP$ est diagonale.

1] Un automorphisme autoadjoint $s : E \to E$ est un endomorphisme bijectif t.q. $\langle s(x), y\rangle = \langle x, s(y)\rangle \ \forall x, y \in E$

2] La matrice d'un automorphisme autoadjoint est symétrique ${}^TA = A$ dans une base orthonormée et $\det A \neq 0$. Ici $\det A = 3\cdot(6\times3-2\times2)+2\cdot(-2\cdot3-4\cdot2)+4(-4-4\cdot6)$

3] L'éqn caractéristique : $\det(A-\lambda I)=0$ donne
$0 = -\lambda^3+12\lambda^2-21\lambda-98 = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$ $\boxed{\lambda=7 \text{ et } \lambda=-2}$

4) $\lambda=7$ - valeur double, on a une base de vect. propres : $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}$ et pour $\lambda=-2$, $v_3=\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix}$.

Orthogonalisation de $\{v_1, v_2\}$: $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,
$e_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 = \begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{-1/2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/4\\1\\1/4\end{pmatrix}$

Normalisons : $e_1 \rightsquigarrow \boxed{u_1 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$, $e_2 \rightsquigarrow \boxed{u_2 = \frac{1}{3\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}}$

Et pour l'esp. propre de $\lambda=-2$ $\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{u_3=\begin{pmatrix}-2/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}}$

5. $u_3 \perp u_2$, $u_3 \perp u_2$ - les propriétés des esp. propres des matrices symétriques (u_1, u_2, u_3) - b.o.n. alors
$R = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & -1/3\sqrt2 & -2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt2 & -1/3 \\ 1/\sqrt2 & 1/3\sqrt2 & 2/3 \end{pmatrix}$ matrice de passage orthogonale, $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

En plus $R^{-1} = R^T$ par déf de matrice orthog, R^T est aussi orthog.
On a $A = R^{-1}DR$ et alors $D = RAR^{-1}$, on a $P = R^{-1}$