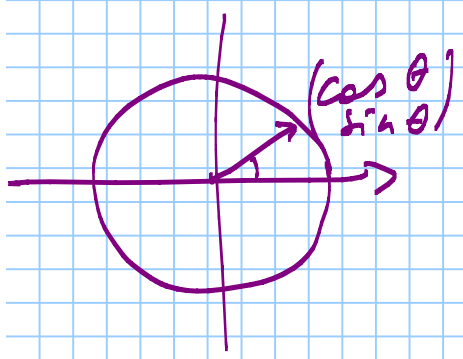
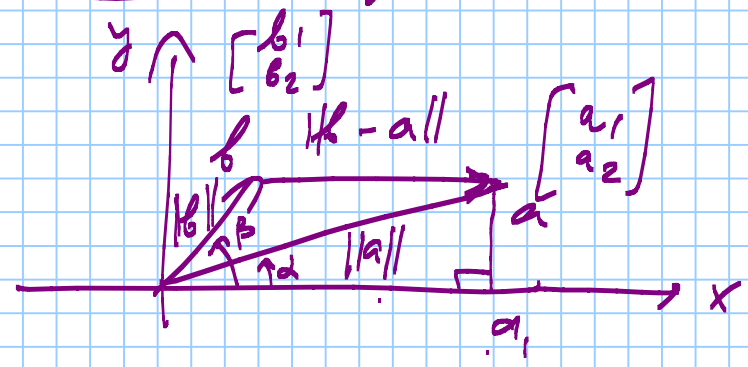
Algèbre IV

Chapitre 3 Projection orthogonale

3.1 Cosinus d'un angle





$$\sin\alpha = \frac{a_2}{\|a\|} \qquad \cos\alpha = \frac{a_1}{\|a\|}$$

$$\sin\beta = \frac{b_2}{\|b\|} \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\|b\|}$$

$\underline{\theta = \beta - \alpha}$ $\qquad \cos\theta = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$

Si produit euclid. canonique $= \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\|a\|\,\|b\|} = \dfrac{{}^Ta\, b}{\|a\|\|b\|}$

Déf Le cosinus de l'angle θ formé par deux vecteurs a et b est

$$\boxed{\cos\theta = \frac{{}^Ta b}{\|a\|\|b\|}}$$

(dépend pas de dim.)

Remarque : $\cos\theta = \frac{{}^Tba}{\|a\|\|b\|}$ aussi ${}^Ta b = \dots = {}^Tba$

Prop $\|b-a\|^2 = \|b\|^2 + \|a\|^2 - 2\|b\|\cdot\|a\|\cos\theta$

Preuve : Si ${}^Ta b = 0$ $(a \perp b)$ on a

$\cos\theta = 0$ et c'est le thm. de Pythagore

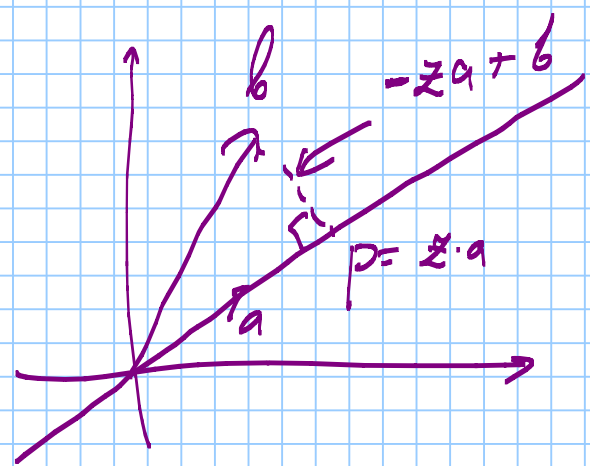
$$\|b-a\|^2 = {}^T(b-a)(b-a)$$

$$= {}^Tb\cdot b - {}^Tb\cdot a - {}^Ta\cdot b + {}^Ta\cdot a$$

$$= {}^Taa + {}^Tbb - 2\|b\|\|b\|\cos\theta$$

$$= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|b\|\|a\|\cos\theta$$

3.2 Projection sur une droite



z - est un nombre (un scalaire)

Comment calculer z ?

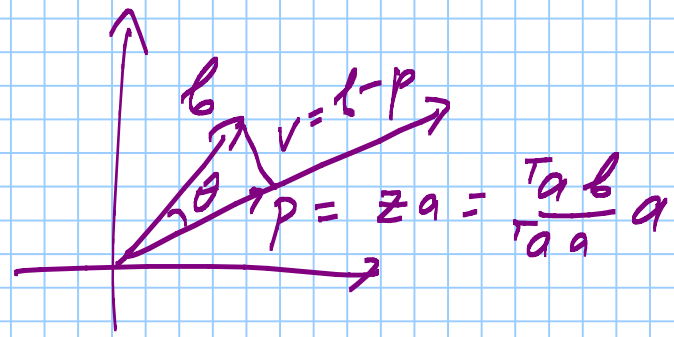
$$(b - za) \perp a \iff {}^Ta(b - za) = 0$$

$$\iff {}^Tab - z\,{}^Taa = 0$$

$$\iff z = \frac{{}^Tab}{{}^Taa}$$

Déf/Prop La projection orthogonale de b sur la droite porté par a est $p = za$ avec $z = \frac{{}^Tab}{{}^Taa}\cdot a$

Remarque



$$\cos\theta = \frac{{}^Ta\,b}{\|a\|\|b\|}$$

On a $\|v\| = \|b-p\|^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \left\| b - \frac{{}^Ta\,b}{{}^Ta\,a}\,a \right\|^2 = \left(b - \frac{{}^Ta\,b}{{}^Ta\,a}\,a\right)\cdot\left(b - \frac{{}^Ta\,b}{{}^Ta\,a}\,a\right)$$

$$= {}^Tb\,b - 2\,\frac{{}^Ta\,b}{{}^Ta\,a}\,{}^Tb\,a + \left(\frac{{}^Ta\,b}{{}^Ta\,a}\right)^2 a\cdot a$$

Remarque
${}^Tx\cdot y = {}^Ty\cdot x$

$$= {}^Tb\,b - \frac{({}^Ta\,b)^2}{{}^Ta\,a} = \frac{{}^Tb\cdot b\cdot {}^Ta\,a - ({}^Ta\,b)^2}{{}^Ta\,a} \geq 0$$

$$\Rightarrow {}^Tb\,b\cdot {}^Ta\,a \geq ({}^Ta\,b)^2$$

On a redécouvert l'inégalité de Schwarz :

$$\langle a, b\rangle \leq \sqrt{\langle a,a\rangle}\cdot\sqrt{\langle b,b\rangle}$$

Remarque comme $\dfrac{{}^Ta\cdot b}{\|a\|\cdot\|b\|} = \cos\theta$

L'inégalité de Schwarz est équivalent à $|\cos\theta| \leq 1 \iff -1 \leq \cos\theta \leq 1$

Remarque On a l'égalité ssi $a \parallel b$ i.e $\cos\theta = 1$, soit $\theta = 0$

<u>Exemple</u> $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ projection sur la droite portée par $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$z = \frac{{}^T a\, b}{{}^T a\, a} = \frac{6}{3} = 2$$

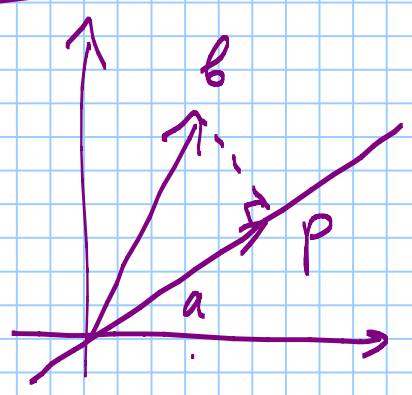
$$p = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{\|p\|}{\|b\|} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{14}}$$

(par la formule $\cos\theta = \dfrac{{}^T a\, b}{\|a\|\|b\|} = \dfrac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{14}}$)

Cauchy-Schwarz : $6 \leq \sqrt{3}\sqrt{14}$ En effet $36 < 42$

3.3 Matrice de projection de rg 1



$$p = \underbrace{\frac{{}^T a\, b}{{}^T a\, a}}_{\in \mathbb{R}}\, a = a \cdot \frac{{}^T a \cdot b}{{}^T a \cdot a}$$

$$= \underbrace{\frac{a \cdot {}^T a}{{}^T a \cdot a}}_{P}\, b$$

multiplic de matrices est associative.

P – la matrice de projection

<u>Déf</u> Matrice de projection de b sur la droite porté par a est

$$P = \frac{a\, {}^T a}{{}^T a\, a}$$

(i.e. la matrice P t.q. $Pb = p$)

<u>Exemple</u> Projection sur $a = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$P = \frac{a\,{}^Ta}{{}^Ta \cdot a} = \frac{1}{(1\,1\,1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\,1\,1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$P\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \quad !$$

<u>Remarques</u>

* $P^2 = P$
* P est symétrique $\quad P = {}^TP$
* $\operatorname{Im} P = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
* $\operatorname{Ker} P$ = plan perpendiculaire à a

  par ex. $\operatorname{Ker} P \ni \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
* $\operatorname{rg} P = 1$.

Ne depend pas de longeur de a :

$$a = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} : P = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}(2\,2\,2) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}4&4&4\\4&4&4\\4&4&4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

3.4 Projections et méthode des moindres carrées

$Ax = b$ possède des solns si $b \in \mathrm{Im}(A)$ = colonnes de A.

Sinon, le système est inconsistant et il n'y a pas de solutions.

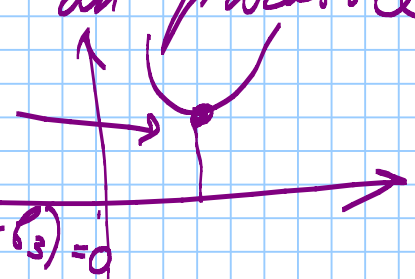
Exemple

$$\begin{cases} 2x = b_1 \\ 3x = b_2 \\ 4x = b_3 \end{cases}$$

a une solution si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

En pratique, on a souvent des systèmes inconsistant - on veut minimiser l'erreur. On cherche une solution x t.q. $E^2 = (2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2$ soit minimale.

S'il existe une solution exacte $E = 0$. Lorsque $b \in \mathrm{Vect}[a]$ le graphe de $E^2(x)$ est un parabole et l'erreur minimale



$$\frac{dE^2}{dx} = 2(2(2x - b_1) + 3(3x - b_2) + 4(4x - b_3)) = 0$$

$$2^2 x - 2b_1 + 3^2 \cdot x - 3b_2 + 4^2 \cdot x - 4b_3 = 0$$

La soln des moindres carrés de

$ax = b$ est.

$$\hat{x} = \frac{2b_1 + 3b_2 + 4b_3}{2^2 + 3^2 + 4^2} = \frac{{}^T a \cdot b}{{}^T a \cdot a}$$

<u>Cas général dans $\mathbb{R}^n$</u> : Resoudre

$ax = b$ en minimisant

$$E^2 = \|ax - b\|^2 = (a_1 x - b_1)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2$$

La dérivé de E^2 est 0 en $\hat{x}$

$$\frac{dE^2}{dx}(\hat{x}) = 0 \Rightarrow (a_1 \hat{x} - b_1) a_1 + \dots + (a_n \hat{x} - b_n) a_n = 0$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

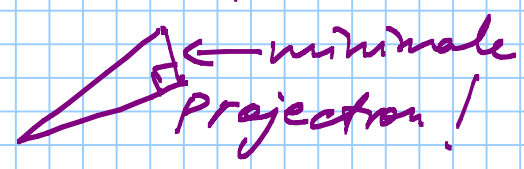
<u>Déf</u> La solution des moindres carrés pour $ax = b$ dans $\mathbb{R}^n$ est $\hat{x} = \frac{{}^T a b}{{}^T a a}$

<u>Remarque</u>

Erreur : $b - \hat{x} a$ doit être orthogonale à a ! En effet,

$${}^T a (b - \hat{x} a) = {}^T a b - \frac{{}^T a b}{{}^T a a} {}^T a \cdot a = 0$$

appelation moindres carrés :



3.5 méthode des moindres carrées dans le cas de plusieurs variables

$$Ax = b \quad , \quad A = m\begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix}^{n} \times \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}^{n} \; b = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}^{m}$$

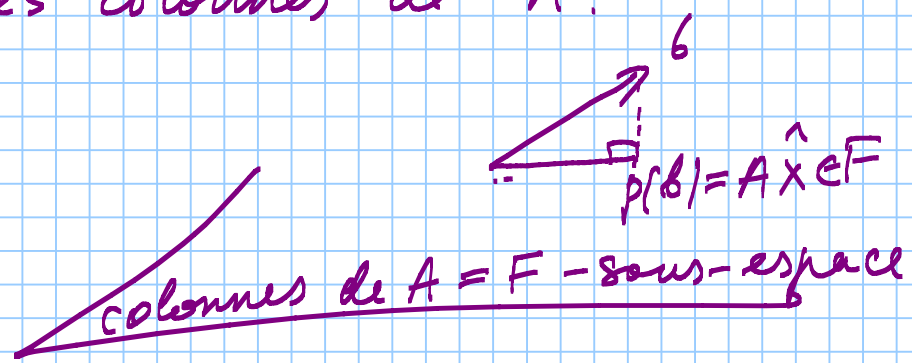
Le système est inconsistant si

$b \notin$ colonnes $(A) = \operatorname{Im} A$.

<u>Question</u> : trouver $\hat{x}$ qui minimise l'erreur.

<u>Erreur</u> $\quad E = \|A\hat{x} - b\|$

C'est la distance de b à l'espace des colonnes de A.



Trouver $\hat{x}$ minimisant l'erreur

= c'est trouver $A\hat{x} \in$ Colonnes de A qui est le plus proche de b.

$P = A\hat{x}$ doit être la projection orthogonale de b sur Colonnes(A) i.e.

$$v = b - A\hat{x} \perp \text{colonnes}(A)$$

Or $\quad (\text{Colonnes de } A)^{\perp} = \ker({}^{T}A)$

Donc le vecteur d'erreur

$r = b - A\hat{x}$ doit vérifier

$${}^{T}A(b - A\hat{x}) = 0$$

Soit ${}^{T}AA\hat{x} = {}^{T}Ab$

<u>Rmq</u> Cela revient à dire que

$b - A\hat{x}$ est orthogonal à toutes les colonnes de A

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} - & {}^{T}a_1 & - \\ - & {}^{T}a_n & - \end{bmatrix} [b - A\hat{x}] = 0$$

Dans ce fait on multipli : $Ax = b$ par ${}^{T}A$: $\quad {}^{T}AAx = {}^{T}Ab$

<u>En resumant</u> : 1) Lorsque le système $Ax = b$ est inconsistant (pas de solu) la solution de moindre carrées qui minimise $\|Ax - b\|^2$ vérifie

$$\boxed{{}^{T}AA\hat{x} = {}^{T}Ab}$$

2) ${}^TAA$ est inversible lorsque les colonnes de A sont linéairement indépendantes. La meilleure approxim. de x est $\boxed{\hat{x} = ({}^TAA)^{-1}\,{}^TAb}$

3) La projection de b sur l'espace de colonnes A est

$$A\hat{x} = \underbrace{A\,({}^TAA)^{-1}\,{}^TA}_{\text{matrice de projection}}\,b \qquad \left(\begin{array}{c} x\text{-rect.} \\ \frac{a\,{}^Ta}{{}^Taa} \end{array}\right)$$

<u>Ex.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$Ax = b$ n'a pas de soln. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 3y = 5 \\ 0 = 6 \end{cases}$

Colonnes A $\subset$ plan(x, y)

${}^TAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = 26 - 25 = 1$

$\hat{x} = ({}^TAA)^{-1}\,{}^TAb = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

La meilleure façon de resoudre le système est $\hat{x}_1 = 2$; $\hat{x}_2 = 1$

L'erreur est $E = b - \underbrace{A\hat{x}}_{\text{projection}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (11)

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

<u>Rem 1</u> si $b \in$ Colonnes(A) i.e. $\exists x$ t.q. $b = Ax$

$$p = A({}^TA A)^{-1}{}^TA \underset{\substack{\shortparallel \\ Ax}}{b} = Ax = b$$

<u>Rem 2</u> si $b \perp$ à toutes les colonnes de A i.e. ${}^TA.b = 0$

$$P = A({}^TA A)^{-1}{}^TA b = 0$$

<u>Rem 3</u> si A est carré et inversible

Colonnes$(A) = \mathbb{R}^n$

$$P = A({}^TA A)^{-1}{}^TA b = A A^{-1}({}^TA)^{-1}{}^TA b = b.$$

<u>Propriétés de la matrice ${}^TA A$</u>

1) ${}^TA A$ est symétrique

2) $\ker {}^TA A = \ker A$ si $x \in \ker A$, alors $x \in \ker {}^TA A$

si $x \in \ker {}^TA A$, ${}^TA A x = 0 \Rightarrow {}^Tx {}^TA A x = 0 \Rightarrow \|Ax\|^2 = 0$

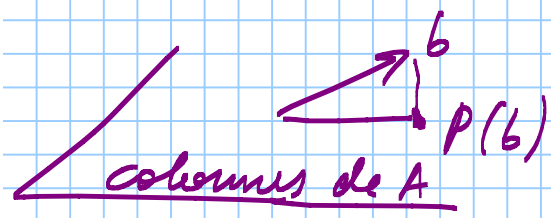
$\Rightarrow Ax = 0$

3) Si les colonnes de A sont linéairement indépendantes

$^TA A$ est - carré
- symétrique
- inversible.

<u>déf</u> : La matrice de projection est

$$\boxed{P = A(^TA A)^{-1}\,^TA}$$



<u>Prop</u> La matrice de projection

$$P = A(^TA A)^{-1}\,^TA$$

vérifie 1) $P^2 = P$

2) $^TP = P$

Inversement, toute matrice H t.q. $H^2 = H$ et $^TH = H$ représente une projection.

<u>Preuve</u> :

$$P^2 = A(^TA A)^{-1}\underbrace{^TA A\,(^TA A)^{-1}}_{Id}\,^TA = A(^TA A)^{-1}\,^TA = P$$

La projection de la projection est la projection.

$$^TP = {}^T(A\,(^TAA)^{-1}\,{}^TA) = {}^T(^TA)\,\underbrace{^T(^TAA)^{-1}}_{\text{matrice}}\,{}^TA = P$$

$^T(^TAA) = {}^TA \cdot A$ donc a le meme pour l'inverse.

<u>Reciproque</u> : Soit $H \in Mat_{n\times n}$.

Supposons que H vérifie $H^2 = H$ et $^TH = H$.

M.q. $\forall b \in \mathbb{R}^n$, Hb est le projecteur sur l'espace engendré par les colonnes de H (d'habitude H n'est pas supposé de rg $= n$, du coup l'espace engendré par les colonnes de H est un ssesp. propre de E)

M.q. $b - H.b \perp$ Vect(Colonnes(H))

Un element dans Vect(Colonnes(H)) :

$$c_1 h_1 + \dots + c_n h_n = (h_1 \dots h_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

i.e. $$b - Hb \perp H \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{c}$$

$$\Leftrightarrow {}^T(b - Hb) \cdot Hc = 0$$

En effet : $$^T(b - Hb)Hc = {}^T((I - H)b)Hc$$
$$= {}^Tb(I - H)^T Hc = {}^Tb(H - {}^TH H)c$$
$$= {}^Tb(H - H^2)c \underset{H = H^2}{=} {}^Tb \cdot 0 \cdot c = 0 \;!$$

$^TH = H$

3.6 Propriétés de projection orthog.

Soit F un ssesp. de E

La projection orthogonale sur F est l'applic linéaire

$$p_F : E = F \oplus F^{\perp} \longrightarrow E$$

définie par $p_F(x) = y$ où $x = y + z$, $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$

Propriétés (1) $p_F \circ p_F = p_F$, $\operatorname{Ker} p_F = F^{\perp}$, $\operatorname{Im} p_F = F$

(2) $\forall x, x' \in E \quad \|x - x'\| \geq \|x - p_F(x)\|$

(3) Soit $p = \dim F$. Dans une base de E réunion d'une base de F et d'une base de $F^{\perp}$, la matrice de p_F est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, I_p - matrice unité d'ordre p.

3.7 Symétrie orthogonale

Déf L'applic. linéaire

$$s_F : E = F \oplus F^\perp \longrightarrow E \quad \text{définie par}$$

$s_F(x) = y - z$ où $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$

est appelée la symétrie orthogonale par rapport à F.

Propriétés : 1) $s_F \circ s_F = Id$

2) pour $\forall\, y \in F$ $\quad s_F(y) = y$ et

$\forall\, z \in F^\perp$, $\quad s_F(z) = -z$

3) s_F est symétrique (sa matrice $S = {}^tS$)

4) Soit $p = \dim F$ Dans une base de réunion de F et d'une base de $F^\perp$

La matrice de s_F est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$

Remarque $\quad s_F = 2P_F - Id.$

<u>Exemple</u> Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et d'une base orthon.

a) Déterminer la matrice dans cette base de la projection orthogonale p sur la droite d'éq. $y = 3x$ $\left(\begin{array}{l} 3x - y = 0 \\ \text{i.e. vect } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \text{ à la droite} \end{array} \right)$

b) Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale S par rapport à la droite $y = 3x$.

<u>Solution</u>

a) On a vect. directeur de la droite $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a $P = \dfrac{a \cdot {}^Ta}{{}^Ta\, a}$, $a\,{}^Ta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

et ${}^Ta\, a = 1 + 9 = 10$

$$P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

b) le vect. directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$P_F = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$S_F = 2P_F - I = \begin{pmatrix} 2/10 & 6/10 \\ 6/10 & 18/10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

<u>Une autre méthode</u> :

On peut trouver le a et le b en faisant le calcul dans la base orthogonale : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

dans laquelle $P_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il faut alors trouver la matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la base canonique alors c'est

$$C \; P_F \; C^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

et donc

$S_F = 2P_F - Id$ comme avant.

Rappel

Comment chercher les coordonées du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$?

On a la matrice de passage de la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donnée par $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ c'est a dire que

Si on a un vecteur $a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ - a, b - coordonnées dans la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ en base canonique on aura $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 3b \\ 3a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Si au contraire on veut trouver a, b à partir de x, y : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

il faut utiliser la matrice inverse

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de projection en base $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est juste $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc d'abord on se met dans la base $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ par $C^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ après agit par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et après revient dans la base canonique :

$$\boxed{C\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$