

4.02.2020 Chapitre 2. Orthogonalité

E e.v. réel (ou complexe) avec un produit scalaire (ou hermitien)

2.1. vecteurs et espaces orthogonaux :

Déf $x, y \in E$ sont orthogonaux si

$$\langle x, y \rangle = 0. \quad \text{on note } x \perp y$$

Rq. Pour un e.v. complexe on a bien

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle y, x \rangle = 0$$

- F_1, F_2 ss.e.v. de E sont orthogonaux

$$\text{ssi } \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in F_1, \text{ et } \forall y \in F_2$$

$$\text{On note } F_1 \perp F_2$$

- On dit qu'une famille de vect. $\{y_1, \dots, y_k\}$ est orthogonale si $\langle y_i, y_j \rangle = 0$

$$\text{pour } \forall (i, j) \in [1, k]^2, i \neq j$$

Si de plus on a $\|y_i\| = 1 \quad \forall i$ on

on dit que $\{y_1, \dots, y_n\}$ est une famille

Exemples : - base canonique $\mathbb{R}^2$ orthonormée

$$= (1, \cos nx, \sin nx)_{n \geq 1} \quad \text{pour } \int_0^{2\pi} f g$$

$$\text{et } \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right) - \text{orthonormée}$$

On verra que si $\dim E < \infty$ il existe une base orthonormée.

Rappel de la dernière fois

2

Prop. Soit $\{u_1, \dots, u_m\}$ une famille de vecteurs ^{non-nuls} deux-à-deux orthogonaux alors cette famille est libre

Démo: Il faut m.g. si

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m = 0 \text{ alors}$$

$$c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

$$\text{On a } \langle 0 | u_1 \rangle = \langle c_1 u_1 + \dots + c_m u_m | u_1 \rangle$$

$$= c_1 \langle u_1 | u_1 \rangle + c_2 \langle u_2 | u_1 \rangle + \dots + c_m \langle u_m | u_1 \rangle$$

$$= c_1 \langle u_1 | u_1 \rangle$$

$$\Rightarrow 0 = c_1 \langle u_1 | u_1 \rangle. \text{ Si } u_1 \neq 0 \text{ alors}$$

$$\langle u_1 | u_1 \rangle \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

en regardant le produit scalaire de $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m$ avec $u_2, u_3, \dots, u_m$ on conclut que $c_2 = 0, c_3 = 0, \dots, c_m = 0$
c.q.f.d.

Propriétés:

$$- F_1 = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k), F_2 = \text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$$

$$\text{alors } F_1 \perp F_2 \Leftrightarrow x_i \perp y_j \quad \forall i, j \in [1, k] \times [1, p]$$

$$- F_1 \perp F_2 \Rightarrow F_1 \cap F_2 = \{0\}$$

Déf $x \in F, x^\perp := \{y \in F, \forall x \in X \langle x, y \rangle = 0\}$

Rmq $x \perp x^\perp$

Proposition:

1) $X^\perp$ est un s.s.e.v. de E

2) $\{0\}^\perp = E, E^\perp = \{0\}$

3) $F \subseteq G, G^\perp \subseteq F^\perp$

4) $V_0^\perp = (\text{Vect } V_0)^\perp$ et plus généralement
 $F^\perp = (\text{Vect } F)^\perp$

5) $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$

6) $F \subset (F^\perp)^\perp$

7) $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

F, G s.s.e.v.

Rq 7 et 8 sont des égalités lorsque E est de $\dim$ fini

Rq. Produit scalaire défini la notion d'orthogonalité.

Question Trouver un exemple de deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$ et deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ orthogonaux dans un des produit mais pas dans l'autre.

3.2 Théorème de Pythagore

$$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle) \quad e_1, \dots, e_k \in E$$

Prop.: 1) $e_1 \perp e_2 \iff \|e_1 + e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$

2) Si la famille $e_1, \dots, e_k$ est orthogonale alors

$$\|e_1 + \dots + e_k\|^2 = \|e_1\|^2 + \dots + \|e_k\|^2$$

3) Si $x = \sum x_i e_i$ $(e_1, \dots, e_n)$ famille orthogonale
 $y = \sum y_i e_i$

$$\|x\|^2 = \sum |x_i|^2 \|e_i\|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^k \bar{x}_i y_i \|e_i\|^2$$

(pour car
réel $|x_i|^2 = x_i^2$

complexe $|x_i|^2 = \bar{x}_i x_i$

On a

$$x_i = \frac{\langle e_i, x \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$$

(En effet dans une
base orthogonale
 $\langle e_i, x \rangle = \langle e_i, \sum x_i e_i \rangle$
 $= x_i \langle e_i, e_i \rangle$)

Dans une base orthonormée (b.o.n.) on a
 $x = \sum_{i=1}^k \langle e_i, x \rangle e_i$ (car $\langle e_i, e_i \rangle = 1$)

La norme:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^k |x_i|^2 = \sum |\langle e_i, x \rangle|^2$$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^k \bar{x}_i y_i = \sum \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_i, y \rangle \\ &= \sum \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \end{aligned}$$

2.3 Orthogonalisation : Procédé Gram-Schmidt

(5)

Exemple 1 $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

On construit une base orthogonale $\{e_1, e_2\}$ de l'espace engendré par h_1, h_2 et on demande que

$$e_1 = h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

le deuxième vecteur e_2 soit être orthogonal

à e_1 : $e_2 = h_2 + \lambda e_1$, t.q. $\langle e_2, e_1 \rangle = 0$

$$\langle h_2 + \lambda e_1, e_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle h_2, e_1 \rangle + \lambda \langle e_1, e_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = - \frac{\langle h_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$$

$$\text{Donc } e_2 = h_2 - \frac{\langle h_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2+3}{2^2+1^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalisé: $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Donc $\{e_1, e_2\}$ - base orthogonale

$$\left\{ \frac{e_1}{\sqrt{5}}, \frac{e_2}{\sqrt{5}} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\} - \text{base orthonormée}$$

6.02.2020 Procédé Gram-Schmidt :

(6)

Soit $F = \text{Vect} \{ f_1, \dots, f_m \}$ où

$f_1, \dots, f_m$ est une famille libre

Construction d'une base $\{ e_1, \dots, e_m \}$

telle que $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$

- On pose $e_1 = f_1$

- On pose $e_2 = f_2 + \lambda_1 e_1$ et on cherche λ_1 t. g. $\langle e_2 | e_1 \rangle = 0$ Alors

$$0 = \langle e_2 | e_1 \rangle = \langle f_2 + \lambda_1 e_1 | e_1 \rangle$$

$$= \langle f_2 | e_1 \rangle + \lambda_1 \langle e_1 | e_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = - \frac{\langle f_2 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} \text{ et on a } e_2 = f_2 - \frac{\langle f_2 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} e_1$$

- On pose $e_3 = f_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$
et on cherche μ_1 et μ_2 t. g.

$$(1) 0 = \langle e_3 | e_1 \rangle$$

$$= \langle f_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 | e_1 \rangle = \langle f_3 | e_1 \rangle + \mu_1 \langle e_1 | e_1 \rangle$$

$$+ \mu_2 \langle e_2 | e_1 \rangle = \langle f_3 | e_1 \rangle + \mu_1 \langle e_1 | e_1 \rangle \Rightarrow \mu_1 = - \frac{\langle f_3 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle}$$

$$(2) 0 = \langle e_3 | e_2 \rangle$$

$$= \langle f_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 | e_2 \rangle = \langle f_3 | e_2 \rangle + \mu_1 \langle e_1 | e_2 \rangle$$

$$+ \mu_2 \langle e_2 | e_2 \rangle = \langle f_3 | e_2 \rangle - \mu_2 \langle e_2 | e_2 \rangle$$

(7)

$$\Rightarrow \gamma_2 = \frac{\langle f_3 | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} \quad \text{et on a}$$

$$e_3 = f_3 - \frac{\langle f_3 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle f_3 | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} e_2$$

et ainsi de suite on a

$$e_k = f_k - \frac{\langle f_k | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle f_k | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} e_2 - \dots - \frac{\langle f_k | e_{k-1} \rangle}{\langle e_{k-1} | e_{k-1} \rangle} e_{k-1}$$

Remarque $\{e_1, \dots, e_m\}$ construit ainsi est une famille libre

(et par conséquent une base de F)

On utilise ici la proposition déjà démontrée : Toute famille de vecteurs non-nuls orthogonaux deux-à-deux est libre.

Exemple 2
 $E = \mathbb{R}^3$ produit scalaire usuel

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, F = \text{Vect}\{v_1, v_2\} \text{ - plan}$$

Gram-Schmidt : base orthogonale de F

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = v_2 - \frac{\langle f_1 | v_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1, \|f_1\|^2 = \langle f_1 | f_1 \rangle = 2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

On remarque que F est engendré par deux vecteurs. C'est un plan dans ce plan on prend $f_1 = v_1$ et on choisit dans ce plan un vect f_2 orthogonal au v_1 .

(8)

Si on cherche à compléter une base $\{f_1, f_2\}$ par un troisième vecteur orthogonal à f_1 et f_2 pour obtenir une base orthogonale de E il suffit de choisir un vecteur v_3 qui n'est pas dans F et procéder à son orthogonalisation. Par exemple

on remarque que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F$
 (c'est évident que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ pour $\forall a, b \in \mathbb{R}$)

$$\text{donc } f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle v, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \frac{\langle v, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ -\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

Ex.3. Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, polynôme de degré ≤ 2 .

Produit scalaire: $\int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$

Vecteurs $1, t, t^2$ définissent une base de E

Orthogonalisation: $e_1 = 1$, $e_2 = t + \alpha \cdot 1$

$$0 = \langle t + \alpha \cdot 1 | 1 \rangle = \int_{-1}^1 (t + \alpha) \cdot 1 dt = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \underline{e_2 = t}$$

$$e_3 = t^2 + \beta t + \gamma \cdot 1$$

$$0 = \langle t^2 + \beta t + \gamma \cdot 1 | 1 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 + \beta t + \gamma dt$$

impaire donc $\int_{-1}^1 = 0$

$$= \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{3}$$

$$0 = \langle t^2 + \beta t + \gamma \cdot 1 | t \rangle = \int_{-1}^1 t^3 + \beta t^2 dt$$
$$= \left[-\frac{t^4}{4} \right]_{-1}^1 + \beta \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\{1, t, t^2\} \rightsquigarrow \left\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\right\}$$

Ex 4] Polynômes de Legendre - base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$:

base $\{1, t, \dots, t^n\}$ par le procédé de Gram-Schmidt on construit une base orth.

$$\left\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t, \dots\right\}$$

Formule générale: $\frac{1}{2^k \cdot k!} \frac{d^k (t^2 - 1)^k}{dt^k}$

2.4. Projection orthogonale.

10

Déf: soit F un espace vect. de E
On dit que un vecteur v est orthogonal à F si il est orthogonal à tout vecteur de F .

Remarque Si ^{le vecteur} g est orthogonal aux $f_1, \dots, f_m$ alors g est orthogonal aux combinaisons linéaires de $f_1, \dots, f_m$:
 $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m$
 $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Car si $\langle g, f_i \rangle = 0, \forall i$ on a

$$\langle g, \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m \rangle = \lambda_1 \langle g, f_1 \rangle + \lambda_2 \langle g, f_2 \rangle + \dots + \lambda_m \langle g, f_m \rangle = 0$$

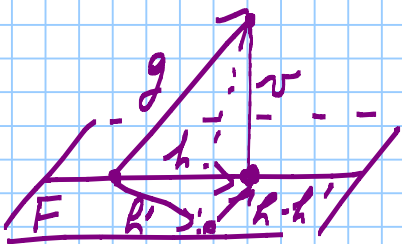
Mors pour que g soit orthogonal à un sous-espace F il suffit que g soit orthogonal aux éléments de la base de F .

Soient $F \subset E$ et un vecteur $g \notin F$
à priori g n'est pas orthogonal à F . On cherche à trouver la décomposition de g en somme $g = h + v$ t.q. $h \in F$ et $v \perp F$

h - est une projection orthogonale
de g sur F .

Ce pfm. a toujours une solution et une seule.

On va m.g. le vecteur perpendiculaire
donne la distance la plus courte
d'un point à un sous-espace.



Soit $h' \in F$ t.q. $h' \neq h$
On va m.g. $|g - h'| > |g - h|$

On remarque $h - h' \in F$
 $\Rightarrow (h - h') \perp v$, Pythagore:

$$|h - h'|^2 + |g - h|^2 = |g - h'|^2$$

$$\Rightarrow |g - h'| > |g - h|$$

En pratique? Comment trouver
la projection orthogonale de g ?

Soit $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ une base de F

On cherche $h = c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$

ou on trouvera les coeffs
 $c_1, c_2, \dots, c_m$ de la condition

F .

Pour cela il faut et il suffit: ⁽¹²⁾
 que $\langle g - h | f_k \rangle = 0$, $\forall k=1, \dots, m$ ou bien
 $\langle h | f_k \rangle = \langle g | f_k \rangle$

$\Rightarrow \langle c_1 f_1 + \dots + c_m f_m | f_k \rangle = \langle g | f_k \rangle \quad \forall k=1, \dots, m$
 Pour trouver $c_1, \dots, c_m$ on a m éqs.:

$$c_1 \langle f_1 | f_k \rangle + c_2 \langle f_2 | f_k \rangle + \dots + c_m \langle f_m | f_k \rangle = \langle g | f_k \rangle \quad (*)$$

Si $\{f_1, \dots, f_m\}$ est une base orthonormale
 alors $c_k = \langle g | f_k \rangle$ car $\langle f_l | f_k \rangle = \begin{cases} 1, l=k \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$

Puisque dans chaque sous-espace F
 de dim m on peut trouver une
 base orthonormée pour tout vecteur
 $\neq \in E$ il existe et une
 seule projection orthogonale h sur F

Mais cela aussi signifie que
 dans une base quelconque le
 système ~~(*)~~ a une solution et une
 seule. Donc le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} \langle f_1 | f_1 \rangle & \langle f_2 | f_1 \rangle & \dots & \langle f_m | f_1 \rangle \\ \langle f_1 | f_2 \rangle & \langle f_2 | f_2 \rangle & \dots & \langle f_m | f_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_1 | f_m \rangle & \dots & \dots & \langle f_m | f_m \rangle \end{pmatrix} \neq 0$$

13

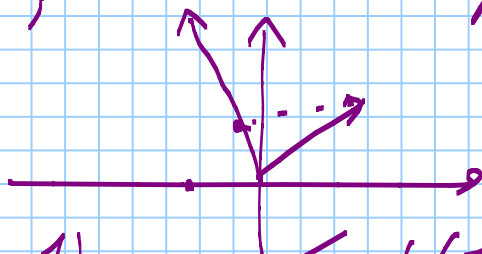
C'est un déterminant de Gram-Schmidt de la famille de vecteurs $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$.

Exemple lorsque $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Soit $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trouver la projection orthogonale de g sur F .

On cherche à présenter

$g = h + v$, h - la projection sur F .



$$h = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \left\langle v \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

alors $\left\langle g \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = c_1 \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$c_1 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3}{(-1)^2 + 3^2} = \frac{2}{10}$$

$$h = \frac{2}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Ex 2 Projection de $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur

$F = \text{Vect}\{f_1, f_2\}$ où $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$p_F(e_1) = \frac{\langle e_1, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 + \frac{\langle e_1, f_2 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \rangle}{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ex 3 $E = \mathbb{R}^3$ soit F un s.s.e.v. de E

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x - y - \sqrt{2}z = 0 \right\}$$

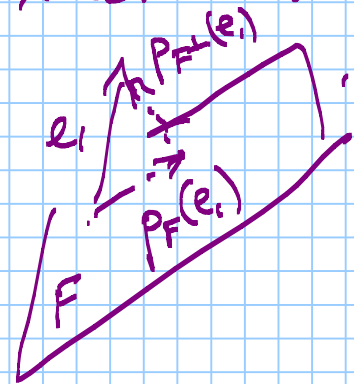
Remarque: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est orthogonale à n'importe quel vecteur de F : soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$ on a le produit scalaire avec $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ exactement

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = x - y - \sqrt{2} \cdot z = 0$$

d'où $F^\perp = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

$$e_1 = p_F(e_1) + p_{F^\perp}(e_1)$$

et $p_F(e_1) = e_1 - p_{F^\perp}(e_1)$



$$p_{F^\perp}(e_1) = \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \rangle}{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$p_F(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Rappel Si F est un sous-espace de l'espace vect. E pour $\forall$ vect. g de E on définit une projection sur F .
 g a une unique décomp. $g = v + h$.

où v est un vecteur orthogonal à F . On écrit $v \in F^\perp$ et la projection orthogonal sur F
 $p_F g = h$

Def
 Une applic. linéaire

$p: E \rightarrow E$ est un projecteur

si $\boxed{p \circ p = p}$

C'est un projecteur orthogonal si
 $\text{Ker } p \perp \text{Im } p$.

Lemme soit E un e.v. de dim fini muni de produit scalaire.

Si F est un sous-espace de E . Alors son orthogonal $F^\perp$ est le supplémentaire de F .
 i.e. $F \oplus F^\perp = E$ (^{on trouve} on complète une base orthog. de F par une base orthog. de $F^\perp$)

En particulier, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.