

---

**Feuille n° 5**  
**Équations différentielles**

---

**Exercice 1** (\*)

Résoudre sur  $\mathbf{R}$  les équations différentielles suivantes :

1.  $y' + 2y = x^2$
2.  $y' + y = 2 \sin x$
3.  $y' - y = (x + 1)e^x$
4.  $y' + y = x - e^x + \cos x$

**Exercice 2** (\*)

Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1.  $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$  sur  $]0; +\infty[$
2.  $y' - y = x^k e^x$  sur  $\mathbf{R}$ , avec  $k \in \mathbf{N}$
3.  $x(1 + \ln^2(x))y' + 2 \ln(x)y = 1$  sur  $]0; +\infty[$

**Exercice 3**

Résoudre, en  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable deux fois, les équations différentielles suivantes.

- (a)  $f'' - 3f' + 2f = 0$  (\*)
- (b)  $f'' + 4f = 0$  (\*)
- (c)  $f'' + 2f' + 2f = 0$ ,
- (d)  $f'' + 2f' + f = t$  (\*)
- (e)  $f'' + f' - 2f = e^t$ ,
- (f)  $f'' + 2f' + 2f = \sin t$
- (g)  $f'' + f = 1 + \cos(2t)$  (\*)
- (h)  $f'' + f' + f = te^t$ .

Pour les équations (a), (b) et (h), donner la solution qui vérifie  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 1$ .

**Exercice 4**

Déterminer les fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  dérivables telles que

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

**Exercice 5** (\*)

Déterminer les valeurs de  $\lambda \in \mathbf{R}$  pour lesquelles le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} f''(t) + \lambda f(t) = 0, & t \in \mathbf{R}, \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

admet des solutions  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  non identiquement nulles et calculer ces solutions.

**Exercice 6** (\*)

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , f''(t) + f(t) = \tan t. \quad (1)$$

1. Soit  $f \in \mathcal{C}^2\left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \right)$ .

(a) Justifier qu'il existe  $u \in \mathcal{C}^2\left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \right)$  tel que pour tout  $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $f(t) = \cos t u(t)$ .

(b) Montrer que  $f$  est solution de (1) si et seulement si  $u$  est solution de

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \cos t u''(t) - 2 \sin t u'(t) = \tan t. \quad (2)$$

2. Résoudre, en  $v : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbf{R}$  dérivable, l'équation différentielle

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \cos t v'(t) - 2 \sin t v(t) = \tan t.$$

3. En utilisant le changement de variable  $x = \sin t$ , déterminer les primitives de  $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$  sur l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

4. Résoudre, en  $f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbf{R}$ , l'équation différentielle (1).

**Exercice 7**

Déterminer les fonctions réelles  $f$  dérivables sur  $\mathbf{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = f(2 - x)$$