**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2018-2019
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 2 06 février 2019

---

**Correction Devoir surveillé n°1**
**Durée : 1h30**

---

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*

**Exercice 1** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $B$ telles que $BA = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Solution :** On cherche les matrices $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $BA = I_2$. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$, alors

$$BA = \begin{pmatrix} a+3b-c & 2a+4b+4c \\ x+3y-z & 2x+4y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} a+3b-c=1 \\ 2a+4b+4c=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+3y-z=0 \\ 2x+4y+4z=1 \end{cases}$$

En résoudant les équations, on obtient que

$$\begin{cases} a=-2-8c \\ b=1+3c \\ c\in\mathbb{R} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=-8z+\frac{3}{2} \\ y=3z-\frac{1}{2} \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

**Exercice 2 ($*$)** Soient $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ deux applications **continues**. On suppose que $f([0,1]) \subset [0,1]$, $g([0,1]) \subset [0,1]$ et que, de plus $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Supposons que $f - g$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.

1. Montrer que $f$ possède un point fixe.
   **Proof :** Puisque $f([0,1]) \subset [0,1]$, pour la fonction $h(x) = f(x) - x$, on a
   $$h(0) \geqslant 0 \text{ et } h(1) \leqslant 0.$$
   Par thm de la valeur intermédiaire, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $h(x_0) = 0$. Donc, $f$ a un point fixe $x_0$.
2. Montrer que $f > g$ ou $f < g$, c'est-à -dire
   $$\Big(\forall x\in[0,1],\ f(x)>g(x)\Big) \text{ ou } \Big(\forall x\in[0,1],\ f(x)<g(x)\Big).$$
   **Proof :** Puisque $f - g$ ne s'annule pas sur $[0,1]$, par le thm de la valeur intermédiaire, $f - g$ ne change pas de signe sur $[0,1]$. Autrement dit,
   $$\Big(\forall x\in[0,1],\ f(x)>g(x)\Big) \text{ ou } \Big(\forall x\in[0,1],\ f(x)<g(x)\Big).$$
3. Soit $x_0$ **un point fixe** de $f$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = f(x_n)$.
   (b) En déduire que $(x_n)$ est décroissante si $\forall x \in [0,1],\ f(x) > g(x)$.
   (c) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

**Proof :** (a) Puisque $f(x_0) = x_0$ et $x_1 = g(x_0) \in [0,1]$, on voit que

$$f(x_1) = f(g(x_0)) = g(f(x_0)) = g(x_0) = x_1$$

car $f \circ g = g \circ f$. Pour tout $n \geqslant 1$, par itération, on voit que $x_n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n}(x_0) \in [0,1]$ et que

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f \circ g(x_n) = f \circ \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n+1}(x_0) \\ &= g \circ f \circ \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n}(x_0) = \cdots = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n+1} \circ f(x_0) \\ &= \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n+1}(x_0) = x_{n+1}. \end{aligned}$$

(b) si $f > g$ sur $[0,1]$, observons que

$$x_{n+1} = g(x_n) < f(x_n) = x_n \in [0,1].$$

Donc, $(x_n)$ est décroissante.
(c) Si $f > g$, puisque $(x_n)$ est une suite décroissante dans $[0,1]$, elle admet une limite $x^* \in [0,1]$. Parallèlement, si $f < g$, $(x_n)$ est une suite croissante dans $[0,1]$. Donc elle admet aussi une limite $x^* \in [0,1]$.

4. Conclure.
**Proof :** Notons que $x_n = f(x_n) \in [0,1]$ pour tout $n \geqslant 0$. Puisque $f$ est continue, lorsque $n \to \infty$, $x^* = f(x^*)$. De plus,
$$g(x_n) = x_{n+1}.$$
Puisque $g$ est continue, lorsque $n \to \infty$, on obtient que
$$g(x^*) = x^*.$$
Alors, on a $f(x^*) = x^* = g(x^*)$. Par l'absurde, $f - g$ s'annule sur $[0,1]$.

**Exercice 3**

1. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $x(e^x - 1) > x^2 > 0$.
**Proof :** Pour tout $x > 0$,
$$x(e^x - 1) > x^2 \Longleftrightarrow e^x - 1 > x.$$
Il suffit de montrer que $e^x - 1 > x$ pour tout $x > 0$. Soit $f(x) = e^x - 1 - x$, alors $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et
$$f'(x) = e^x - 1 > 0, \forall x > 0.$$
D'où, $f(x) > f(0) = 0$, pour tout $x > 0$. Autrement dit, $e^x - 1 > x$ pour tout $x > 0$.
*Indication :* on pourra au choix étudier les variations d'une fonction bien choisie, appliquer le théorème des accroissements finis ou écrire $e^x - 1$ comme une intégrale.
(b) En déduire que si $x \geqslant 0$ vérifie $x(e^x - 1) = x^2$, alors $x = 0$.
**Proof :** Si $x > 0$, $x(e^x - 1) > x^2$. Si $x = 0$, $x(e^x - 1) = x^2$. Donc,
$$x \geqslant 0 \text{ vérifie } x(e^x - 1) = x^2 \Longrightarrow x = 0.$$

2. On définit une suite strictement positive : $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{e^{u_n} - 1}.$$
(a) Montrer que $(u_n)$ est décroissante.
(b) Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

**Proof :** (a) Notons que $u_0 > 0$ implique $0 < u_0^2 < u_0(e^{u_0} - 1)$. Alors,

$$0 < u_1 = \frac{u_0^2}{e^{u_0} - 1} < u_0.$$

Par itération/récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, on a toujours

$$0 < u_{n+1} = \frac{u_n^2}{e^{u_n} - 1} < \frac{u_n(e^{u_n} - 1)}{e^{u_n} - 1} < u_n \text{ puisque } u_n > 0.$$

On en déduit que $(u_n)$ est décroissante.
(b) Notons que $0 < u_n \leqslant u_0 = 1$ pour tout $n \geqslant 1$. $(u_n)$ est une suite décroissante dans $[0, 1]$. Donc elle admet une limite $u^* \in [0, 1]$. Notons que pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1}(e^{u_n} - 1) = u_n^2$$

Par la continuité de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la fonction $x \mapsto e^x - 1$, lorsque $n \to \infty$,

$$u^*(e^{u^*} - 1) = (u^*)^2 \text{ avec } u^* \geqslant 0.$$

On en déduit par 1(b) que $u^* = 0$.

**Exercice 4**

1. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer $B^2$ et exprimer $B^2$ en fonction de $B$.
   (b) En déduire $B^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   **Solution.** (a)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B.$$

   (b) $B^0 = I_3$. Par itération, pour tout $n \geqslant 1$,

$$B^n = B^2 B^{n-2} = 3B^{n-1} = 3 \times 3B^{n-2} = \cdots = 3^{n-1}B.$$

2. Pour $a \in \mathbb{R}$,

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

   (a) Pour quel valeur de $a$, $M(a)$ peut s'exprimer comme un multiple scalaire de $B$ ? Pour quel valeur de $a$, $M(a)$ peut s'exprimer comme un multiple scalaire de $I$ ?
   (b) En général, exprimer $M(a)$ comme une combinaison linéaire de $B$ et $I$.
   (c) Montrer que $M(a)M(b) = M(a + b - 3ab)$.
   (d) Pour quel $a$, $M(a)$ est inversible ? Dans ce cas-là, trouver son inverse.
   (e) Pour les $a$ tel que $M(a)$ ne soit pas inversible, trouver les noyaux et les images de $M(a)$.
   (f) (Bonus) Montrer que $M(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ peut sécrire comme $M(a_n)$ où $(a_n)$ est une suite à déterminer.
   *Indication :* on pourra utiliser la formule de Newton pour les matrices ou appliquer (c).

**Solution.** (a) $M(a) = \lambda B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$1 - 2a = a \Longleftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Dans ce cas-là, $M(1/3) = 1/3B$. $M(a) = \lambda I$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$a = 0.$$

Dans ce cas-là, $M(0) = I$.

(b) $M(a) = aB + (1 - 3a)I$.

(c) En effet,

$$\begin{aligned}
M(a)M(b) =&[aB + (1 - 3a)I][bB + (1 - 3b)I] \\
=&abB^2 + [(1 - 3a)b + (1 - 3b)a]B + (1 - 3a)(1 - 3b)I \\
=&3abB + (a + b - 6ab)B + (1 - 3a - 3b + 9ab)I \\
=&(a + b - 3ab)B + [1 - 3(a + b - 3ab)]I = M(a + b - 3ab).
\end{aligned}$$

(d) Rappelons que $M(0) = I$. Si on peut trouver $b$ tel que

$$a + b - 3ab = 0,$$

alors, $M(a)$ est inversible. En effet, $a + b - 3ab = 0 \Longrightarrow b = \frac{a}{3a-1}$ si $3a - 1 \neq 0$. Si $3a - 1 = 0$, on a $a + b - 3ab = a = \frac{1}{3}$. On en déduit que si $a \neq 1/3$,

$$M(a) \text{ est inversible et son inverse est } M(a)^{-1} = M(\frac{a}{3a-1}),$$

et que si $a = 1/3$,

$$M(\frac{1}{3})M(b) = M(\frac{1}{3}), \forall b \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si on prend $b = 1/3$,

$$M(\frac{1}{3})^2 = M(\frac{1}{3}) = 1/3B \text{ qui n'est pas inversible.}$$

(Si $M(\frac{1}{3})$ est inversible, alors $M(\frac{1}{3})(M(\frac{1}{3}) - I) = 0 \Longrightarrow M(\frac{1}{3}) - I = 0$ contradiction avec $M(\frac{1}{3}) = B \neq I$.)

(e) La seule valeur de $a$ telle que $M(\frac{1}{3})$ ne soit pas inversible est que $a = 1/3$. Dans ce cas-là,

$$M(a) = \frac{1}{3}B.$$

Alors

$$Ker(M(a)) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | M(a) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\}$$

Par simple calculations, on voit que

$$Ker(M(1/3)) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}.$$

De plus, l'image est

$$Im(M(1/3)) = \{c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | c \in \mathbb{R}\}.$$

(f) Rappelons que $M(a) = aB + (1 - 3a)I$. Par la formule de Newton,

$$\begin{aligned}
M(a)^n =&(aB + (1 - 3a)I)^n \\
=&\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k B^k (1 - 3a)^{n-k} \\
=&(1 - 3a)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k 3^{k-1} B (1 - 3a)^{n-k} = (1 - 3a)^n I + \frac{1}{3} B \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (3a)^k (1 - 3a)^{n-k} \\
=&(1 - 3a)^n I + \frac{1}{3} B((3a + 1 - 3a)^n - (1 - 3a)^n) = \frac{1 - (1 - 3a)^n}{3} B + (1 - 3a)^n I \\
=&\frac{1 - (1 - 3a)^n}{3} B + [1 - 3 \times \frac{1 - (1 - 3a)^n}{3}]I = M(a_n) \text{ avec } a_n = \frac{1 - (1 - 3a)^n}{3}.
\end{aligned}$$

Ou par (c), on en déduit que $a_{n+1} = a + a_n - 3aa_n$ qui implique que $a_n = \frac{1-(1-3a)^n}{3}$.