Université Claude Bernard - Lyon 1 Cursus préparatoire : FDM 2

Devoir maison

Exercice 1
Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $y' \operatorname{ch} x + 2y \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$.

Exercice 2
Dans cet exercice, les questions 1.(a) et 1.(b) sont indépendantes de la suite.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.
   (a) Donner l'expression de $u(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
   (b) Chercher une base du noyau de u. Quel est le rang de u ?
2. Calculer A^2 et vérifier que $A^3 = 0$.
3. Montrer que la famille (I_3, A, A^2) est une famille libre $M_3(\mathbf{R})$.
4. Soit $E = \{aI_3 + bA + cA^2 \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{R})$, puis que (I_3, A, A^2) en est une base.
5. On fixe $B = aI_3 + bA + cA^2$ une matrice de E.
   (a) Montrer que l'application φ_B, définie sur E par $\varphi(M) = BM$ pour tout $M \in E$, est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que si B est inversible, alors φ_B est injective.
   (c) Montrer que si φ_B est surjective, alors B est inversible.
   (d) En déduire que B est inversible si et seulement si φ_B est bijective.
   (e) Écrire la matrice de φ_B dans la base (I_3, A, A^2).
   (f) Montrer que cette matrice est inversible si et seulement si $a \neq 0$.
6. Quelles sont les matrices inversibles de E ?