Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

DM 2

EXERCICE 1

Notons (E) l'équation $y' \operatorname{ch} x + 2y \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$, à résoudre sur $\mathbb{R}$.
Comme $\operatorname{ch} x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, (E) équivaut à $y' + 2\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} y = 1$.

- Pour résoudre l'équation sans second membre, on cherche une primitive de $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Cette fonction est de la forme $\frac{u'}{u}$,

et donc $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \ln(\operatorname{ch} x) + \text{cste}$ (remarquez que $\operatorname{ch} x > 0$ pour tout x)

Ainsi les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \longmapsto \lambda e^{-2\ln(\operatorname{ch} x)} = \frac{\lambda}{\operatorname{ch}^2 x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Cherchons une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$

On a alors : $\forall x$, $y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{\operatorname{ch}^2 x} - \lambda(x) \times 2\frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^4 x}$

$$= \frac{\lambda'(x)}{\operatorname{ch}^2 x} - 2\lambda(x)\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}.$$

Ainsi $y' + 2\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} y = 1 \iff \frac{\lambda'(x)}{\operatorname{ch}^2 x} - 2\lambda(x)\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} + 2 \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\frac{\lambda(x)}{\operatorname{ch}^2 x} = 1$

$$\iff \lambda'(x) = \operatorname{ch}^2 x.$$

Écrivons $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)$.

Une primitive de ch^2 est donc $x \mapsto \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2x) + \frac{x}{2}$$

Une solution de l'équation complète est donc $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}(2x) + \frac{x}{2}\right)$.

- Finalement, $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\left(\frac{\operatorname{sh}(2x)}{4} + \frac{x}{2}\right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

EXERCICE 2

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1 a) Par définition de u, la première colonne de A donne $u(1,0,0) = (-4,-5,3)$, et de même : $u(0,1,0) = (3,4,-2)$ et $u(0,0,1) = (1,2,0)$.

Cela montre que $u(x,y,z) = (-4x+3y+z, -5x+4y+2z, 3x-2y)$

Rq : on retrouve cela en calculant $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x,y,z) \in \ker u \iff \begin{cases} -4x+3y+z = 0 \\ -5x+4y+2z = 0 \\ 3x-2y = 0 \end{cases}$

Ce système équivaut à $\begin{cases} 3x-2y = 0 \\ y+3z = 0 \\ 2y+6z = 0 \end{cases}$

c.à.d $\begin{cases} 3x-2y = 0 \\ y+3z = 0 \end{cases}$, c.à.d $\begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ z = -\frac{1}{3}y \end{cases}$

Ainsi, $\ker u = \left\{ \left(\frac{2}{3}y, y, -\frac{1}{3}y\right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$

$\ker u = \mathrm{Vect}\{(2,3,-1)\}$

$\ker u$ est donc de dimension 1. D'après le théorème du rang (utilisable ici car $\dim \mathbb{R}^3 < \infty$), on en déduit que $\operatorname{rg} u = 3 - \dim \ker u = 2$.

2. On a $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On vérifie ensuite que $A^3 = A^2 . A = 0$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

3. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = 0$.
Multiplions par A : $\alpha A + \beta A^2 = 0$ puisque $A^3 = 0$
Rebelote : $\alpha A^2 = 0$
Or, on a vu que $A^2 \neq 0$, de sorte que $\alpha = 0$
En remontant les égalités, il vient alors $\beta = 0$ puis $\gamma = 0$.
Cela mq (I_3, A, A^3) est une famille libre.

4. On voit directement que $E = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$: c'est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$, engendré par (I_3, A, A^2).
On vient de montrer que cette famille est libre : c'est donc une base de E.

5.a) • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M, M' \in E$. Alors $\varphi_B(\lambda M + M') = B(\lambda M + M')$
$= \lambda BM + BM'$
$= \lambda \varphi_B(M) + \varphi_B(M')$
Cela montre que φ_B est linéaire.

• Par ailleurs, si $M \in E$, on peut écrire $M = \alpha I + \beta A + \gamma A^2$
et donc $\varphi_B(M) = (aI + bA + cA^2)(\alpha I + \beta A + \gamma A^2)$
$= a\alpha I + a\beta A + a\gamma A^2 + b\alpha A + b\beta A^2 + c\alpha A^2$
$+ 0$ car $A^3 = A^4 = 0$.
Ainsi $\varphi_B(E) \subset E$.
Finalement, φ_B est bien un endomorphisme de E.

b) Si B est inversible, alors on remarque que $\ker \varphi_B = \{0\}$
(En effet, $BM = 0 \Leftrightarrow M = 0$ si B est inversible)
φ_B est donc injective.

c) Si φ_B est surjective, la matrice $I_3 \in E$ admet un antécédent par φ_B : $\exists M \in E / \; BM = I_3$.

Cela montre que B est inversible à droite, et comme c'est une matrice carrée, cela montre qu'elle est inversible.

d) Comme φ_B est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, son injectivité équivaut à sa surjectivité.
Les deux questions précédents montrent donc que φ_B est bijectif ssi B est inversible

e) On calcule : $\varphi_B(I_3) = BI = B = aI_3 + bA + cA^2$

$$\varphi_B(A) = (aI_3 + bA + cA^2)A = aA + bA^2$$

$$\varphi_B(A^2) = (aI_3 + bA + cA^2)A^2 = aA^2$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{(I, A, A^2)}(\varphi_B) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$

f) • Si $a = 0$, la matrice précédente possède une colonne nulle, donc n'est pas inversible
• Si $a \neq 0$, l'algorithme de Gauss montre qu'elle est inversible.

Donc la matrice est inversible ssi $a \neq 0$.

6. Cela montre que les matrices inversibles de E sont toutes les matrices $aI_3 + bA + cA^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.