Fiche 3 - Variables aléatoires et lois de probabilité

1 - Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. On considère l'univers $\Omega = [\![1, 10]\!]$ que l'on munit de la probabilité uniforme. On définit une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ par, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si } \omega \text{ n'est ni un multiple de 2 ni un multiple de 3.} \\ 0 & \text{si } \omega \text{ est un multiple de 2.} \\ 1 & \text{si } \omega \text{ est un multiple de 3 mais n'est pas un multiple de 2.} \end{cases}$$

1. Déterminer les événements $\{X = -1\}$, $\{X = 0\}$ et $\{X = 1\}$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer la loi de $|X|$.

Exercice 2. Une urne contient initialement une boule rouge et cinq boules vertes. On y effectue deux tirages d'une boule selon la règle suivante : après chaque tirage on remet dans l'urne la boule tirée et on y ajoute deux autres boules de la même couleur. On appelle X le nombre de boules vertes tirées. Déterminer la loi de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3.

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer sans calcul que $E(X) = np$.
2. Soit X est une variable aléatoire binomiale d'espérance 6 et de variance $2,4$. Trouver $P\{X = 5\}$.

Exercice 4. Dans une urne, n boules sont numérotées de 1 à n. On prélève m boules consécutivement en remettant, entre chaque tirage, la boule tirée. On définit X comme étant le nombre maximal inscrit sur les boules tirées.

1. Calculer $P\{X \leq 1\}$.
2. Calculer $P(X \leq k\}$ pour $k \in [\![1, m]\!]$.
3. En déduire $P(X = k\}$ pour $k \in [\![1, m]\!]$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire. Calculer l'espérance dans les cas suivants :

1. X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Exercice 6. En moyenne, chaque année, sur l'ensemble de la planète, il y a 15 séismes majeurs (de magnitude supérieure à 7). On suppose que le nombre de séismes suit une loi de Poisson. Calculer la probabilité que, cette année, le nombre de séisme soit inférieur à 5.

Exercice 7. Une vendeuse de journaux achète ses journaux 1 euros et les revend $1,5$ euros. Cependant, elle ne peut pas se faire rembourser les exemplaires invendus. On suppose que la demande journalière est une variable aléatoire binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = \frac{1}{3}$. Quel est approximativement le nombre le journaux qu'elle doit acheter afin de maximiser l'espérance de son bénéfice?

2 - Variables aléatoires continues

Exercice 8. Calculer l'espérance et la variance d'une variable uniforme sur $[a, b]$, d'une variable exponentielle de paramètre λ et d'une variable normale centrée réduite.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire de densité

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto x 1_{[0,1]}(x) + (2-x) 1_{[1,2]}(x)$$

1. Calculer la fonction de répartition F de X.
2. Calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq \frac{1}{2})$, $P(X > \frac{3}{2})$ et $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{5}{4})$.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 10. Une variable aléatoire X admet pour fonction de répartition

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \qquad x \longmapsto \frac{x^2 + x^3}{2} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x).$$

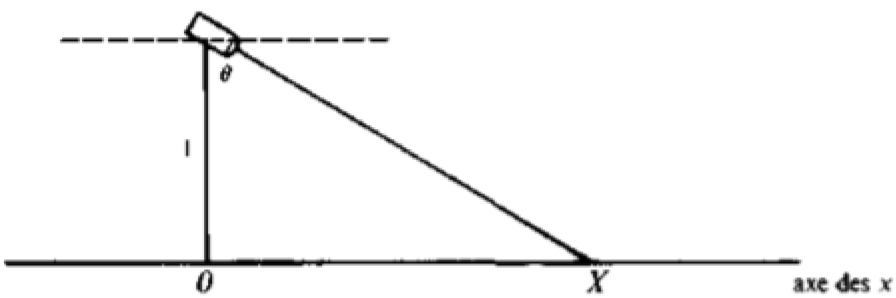
Exercice 11. Un bus circule entre deux villes A et B distantes de $100km$. On admet que lorsque le bus tombe en panne, la distance de l'endroit de la panne à la réparation en A, une en B et une autre à mi-ditance entre A et B. On suggère qu'il serait plus efficace d'avoir les trois stations localisées respectivement à 25, 50 et 75km de A. Etes-vous de cet avis? Pourquoi?

Exercice 12. La largeur (en cm) d'une encoche dans une pièce fabriquée en aluminium est distribuée selon une loi normale de paramètres $\mu = 2$ et $\sigma = 0,012$. Les limites de tolérance sont données comme étant $2,000 \pm 0.0012$. Quel sera le pourcentage de pièces défectueuses?

Exercice 13. Dans une usine d'emballage, un automate remplit des paquets de café de $250g$. Néanmoins l'automate n'est pas toujours très précis. Il verse donc une quantité de café variable, régie par une loi normale d'écart-type 3 et dont il est possible de régler la quantité moyenne de café versé. Quelle doit être la moyenne théorique choisie pour que 90% des clients achètent bien au moins $250g$ de café?

Exercice 14. Un projecteur à faisceau fin est mis en rotation au dessus du sol (voir le schéma ci-dessous). Il est situé à une distance 1 de l'axe des abscisses. X représente l'abscisse du point d'intersection du faisceau avec l'axe $0x$ et θ est l'angle entre le faisceau lumineux et l'axe $0y$. On a donc $X = \tan(\theta)$. On suppose que θ est uniformément distribuée entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

1. Rappeler la fonction de répartition de θ et en déduire celle de X.
2. En déduire la densité f de X. On dit que X suit une loi de Cauchy.
3. Justifier que $\lim_{l \to +\infty} \int_{-l}^{l} x f(x) dx = 0$.
4. Montrer pourtant que X n'admet pas d'espérance.



3 - Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 15. *Preuve de l'inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev*
Soit X une variable aléatoire réelle qui admet une espérance m et une variance σ^2. L'objectif de cet exercice est de montrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall a > 0, \quad P(|X - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

1. Prouver l'inégalité de Markov : Si on suppose de plus que X est positive ou nulle, alors

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

2. Soit ϕ une fonction croissante et positive sur $\mathbb{R}$ et Y une variable aléatoire telle que $\phi(Y)$ a une espérance. Déduire de la question précédente que, pour tout réel b tel que $\phi(b) \neq 0$, on a

$$P(Y \geq b) \leq \frac{\mathbb{E}[\phi(Y)]}{\phi(b)}.$$

3. En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 16. *Inégalité unilatérale de Tchebychev*
Soit X une variable aléatoire qui admet une espérance et une variance σ^2 finie. On suppose de plus que $m = 0$. L'objectif de cet exercice est de montrer que :

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2}$$

1. Justifier que pour tout $b > 0$, $\quad P\{X \geq a\} \leq P\{(X + b)^2 \geq (a + b)^2\}$.
2. On pose $b = \frac{\sigma^2}{a}$. En utilisant la question 2 de l'exercice 15, prouver l'inégalité souhaitée.

Exercice 17. Le nombre quotidien de morts sur les routes en France est une variable aléatoire X de moyenne $E[X] = 11$.

1. Donner une borne supérieure à la probabilité qu'aujourd'hui le nombre de morts sur les routes dépasse strictement 20.

2. Même question en supposant de plus que X est d'écart-type égal à 3.

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $P(|X| > x) \leq \frac{1}{x^2}$.

2. En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x e^{-t^2/2} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - \tfrac{1}{x^2}).$$

4 - Couples de variables aléatoires

Exercice 19. On considère (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

Y / X	1	2	3	4
1	4/50	2/50	8/50	6/50
2	2/50	1/50	4/50	3/50
3	4/50	2/50	8/50	6/50

1. Détemriner les lois marginales de X et Y.

2. X et Y sont-elles indépendantes?

3. Déterminer la loi de $Z = min(X, Y)$.

4. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 20.
On considère (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f : (x, y) \longmapsto \begin{cases} kx^2y \text{ si } (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer en fonction de k les densités marginales de X et de Y, puis calculer k.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 21. Soit le polynôme $Q(X) = X^2 - 2AX + B$ où A et B sont des variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner la densité de la loi conjointe du couple (A, B).
2. Quelle est la probabilité que Q possède deux racines réelles distinctes ?
3. Quelle est la probabilité que Q possède une racine double ?
4. Quelle est la probabilité que Q possède deux racines complexes non réelles ?