Corrigé partiel de l'exercice # 8, feuille # 1

Soit $\|\,\|$ une norme sur l'espace vectoriel réel E, vérifiant l'identité du parallélogramme

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\ \forall x,y\in E. \tag{1}$$

Nous définissons

$$\varphi:E\times E\to\mathbb{R},\ \varphi(x,y):=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2),\forall x,y\in E. \tag{2}$$

Nous nous proposons de montrer que φ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\ \|$. Commençons par vérifier quelques propriétés inspirées par la partie 1 de l'exercice.

(i) Nous avons

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=2(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2),\ \forall x,y\in E. \tag{3}$$

En effet, en regroupant les termes, (3) revient à

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\ \forall x,y\in E,$$

qui n'est rien d'autre que (1).

(ii) De même, nous avons (vérifier)

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2),\ \forall x,y\in E. \tag{4}$$

(iii) En comparant la définition (2) de φ aux identités (3) et (4), nous trouvons deux nouvelles formules qui donnent φ :

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2),\ \forall x,y\in E, \tag{5}$$

respectivement

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2),\ \forall x,y\in E. \tag{6}$$

(iv) Nous allons utiliser de manière répétée l'identité (1), mais lue « de droite à gauche ». Afin de faciliter la compréhension, réécrivons (1) comme

$$\|x\|^2+\|y\|^2=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2),\ \forall x,y\in E. \tag{7}$$

Passons maintenant aux questions de la partie 2.

(a) Nous avons

$$\varphi(y,x)\overset{(5)}{=\!=}\frac{1}{2}(\|y+x\|^2-\|y\|^2-\|x\|^2)=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)=\varphi(x,y),\ \forall x,y\in E.$$

Par ailleurs,

$$\varphi(x,x)\overset{(5)}{=\!=}\frac{1}{2}(\|x+x\|^2-\|x\|^2-\|x\|^2)=\frac{1}{2}(4\|x\|^2-2\|x\|^2)=\|x\|^2,\ \forall x\in E.$$

(b) Suivons l'indication et calculons

$$\|x+2y\|^2+\|x\|^2 \overset{(7)}{=\!=} \frac{1}{2}(\|2x+2y\|^2+\|2y\|^2) = 2(\|x+y\|^2+\|y\|^2),\ \forall\, x,y\in E,$$

d'où

$$\|x+2y\|^2 = 2\|x+y\|^2+2\|y\|^2-\|x\|^2,\ \forall\, x,y\in E. \tag{8}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\varphi(x,2y) &\overset{(5)}{=\!=} \frac{1}{2}(\|x+2y\|^2-\|x\|^2-\|2y\|^2)\\ &\overset{(8)}{=\!=} \frac{1}{2}(2\|x+y\|^2+2\|y\|^2-\|x\|^2-\|x\|^2-\|2y\|^2)\\ &= 2\times\frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2) \overset{(5)}{=\!=} 2\varphi(x,y),\ \forall\, x,y\in E.\end{aligned}$$

(c) Nous voulons vérifier l'identité

$$\varphi(x+z,y) = \varphi(x,y)+\varphi(z,y),\ \forall\, x,y,z\in E. \tag{9}$$

Pour exprimer $\varphi(x,y)$ et $\varphi(z,y)$, nous utilisons (5). Pour exprimer $\varphi(x+z,y)$, nous utilisons le point (b) et la formule (5) pour obtenir :

$$\varphi(x+z,y) \overset{(b)}{=\!=} \frac{1}{2}\varphi(x+z,2y) \overset{(5)}{=\!=} \frac{1}{4}(\|x+z+2y\|^2-\|x+z\|^2-\|2y\|^2),\ \forall\, x,y,z\in E. \tag{10}$$

En utilisant (10) (et, comme expliqué ci-dessus, la formule (5) pour exprimer $\varphi(x,y)$ et $\varphi(z,y)$), nous obtenons que (9) équivaut à (vérifier)

$$(\|x+y\|^2+\|z+y\|^2)-(\|x\|^2+\|z\|^2) = \frac{1}{2}\|x+z+2y\|^2-\frac{1}{2}\|x+z\|^2,\ \forall\, x,y,z\in E. \tag{11}$$

Pour obtenir (11) (et donc (9)), nous partons des identités du parallélogramme

$$\|x+y\|^2+\|z+y\|^2 \overset{(7)}{=\!=} \frac{1}{2}(\|x+z+2y\|^2+\|x-z\|^2),\ \forall\, x,y,z\in E, \tag{12}$$

$$\|x\|^2+\|z\|^2 \overset{(7)}{=\!=} \frac{1}{2}(\|x+z\|^2+\|x-z\|^2),\ \forall\, x,z\in E. \tag{13}$$

Nous obtenons (11) en retranchant (13) de (12).

(d) Nous avons à montrer l'égalité

$$\varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y),\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}, \forall\, x,y\in E. \tag{14}$$

La preuve se fait successivement pour $\lambda\in\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$.

(d1) $\lambda\in\mathbb{N}$. Fixons $x,y\in E$ et montrons (14) par récurrence sur λ. Nous avons, avec la définition, $\varphi(0,y)=0$ (vérifier) et (14) se vérifie pour $\lambda=0$. Le passage de λ à $\lambda+1$ se fait comme suit :

$$\varphi((\lambda+1)x,y) = \varphi(\lambda x+x,y) \overset{(c)}{=\!=} \varphi(\lambda x,y)+\varphi(x,y) \overset{\text{HR}}{=\!=} \lambda\varphi(x,y)+\varphi(x,y) = (\lambda+1)\varphi(x,y).$$

(d2) $\lambda\in\mathbb{Z}$. Si λ est positif, cela suit de (d1). Si $\lambda<0$, alors $-\lambda\in\mathbb{N}$, d'où

$$0=\varphi(0,y)=\varphi(\lambda x-\lambda x,y) \overset{(c)}{=\!=} \varphi(\lambda x,y)+\varphi(-\lambda x,y) \overset{(d1)}{=\!=} \varphi(\lambda x,y)-\lambda\varphi(x,y),$$

d'où $\varphi(\lambda x,y)=\lambda\varphi(x,y)$.

(d3) $\lambda \in \mathbb{Q}$. Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\lambda = m/n$. Soit $z := (1/n)x$. Alors

$$\varphi(x,y) = \varphi(nz,y) \overset{(d1)}{=\!=\!=} n\varphi(z,y) = n\varphi((1/n)x,y),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x,y \in E,$$

d'où

$$\varphi((1/n)x,y) = \frac{1}{n}\varphi(x,y),\ \forall\, x,y \in E, \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \tag{15}$$

Il s'ensuit que

$$\varphi(\lambda x,y) = \varphi(mz,y) \overset{(d2)}{=\!=\!=} m\varphi(z,y) = m\varphi((1/n)x,y) \overset{(15)}{=\!=\!=} \frac{m}{n}\varphi(x,y) = \lambda\varphi(x,y),\ \forall\, x,y \in E.$$

(d4) $\lambda \in \mathbb{R}$. Fixons $x,y \in E$. Nous allons montrer la propriété suivante.

$$\text{la fonction } \lambda \mapsto f(\lambda) = \varphi(\lambda x,y), \lambda \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

est continue.

Admettons pour l'instant (16) et continuons la preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite (λ_n) de nombres *rationnels* tels que $\lambda_n \to \lambda$ (« les nombres rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$ »). Nous avons

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x,y) = f(\lambda) = f\left(\lim_{n\to\infty}\lambda_n\right) &\overset{(16)}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} f(\lambda_n) = \lim_{n\to\infty}\varphi(\lambda_n x,y)\\ &\overset{(d3)}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty}[\lambda_n\varphi(x,y)] = \left(\lim_{n\to\infty}\lambda_n\right)\varphi(x,y) = \lambda\varphi(x,y),\ \forall\,\lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x,y \in E.\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer (16). Nous avons, en utilisant (5),

$$f(\lambda) = \varphi(\lambda x,y) = \frac{1}{2}(\|\lambda x+y\|^2 - \|\lambda x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|\lambda x+y\|^2 - \lambda^2\|x\|^2 - \|y\|^2).$$

La fonction $\lambda \mapsto \lambda^2\|x\|^2 + \|y\|^2$ étant clairement continue, il suffit de vérifier la continuité de $\lambda \mapsto g(\lambda) = \|\lambda x + y\|$ (justifier pourquoi cette continuité, si elle est satisfaite, entraîne celle de f).

Nous avons

$$\begin{aligned}|g(\lambda) - g(\mu)| &= |\|\lambda x+y\| - \|\mu x+y\|| \le \text{(inégalité triangulaire)}\, \|(\lambda x+y)-(\mu x+y)\|\\ &= \|\lambda x - \mu x\| = \|(\lambda-\mu)x\| = \|x\||\lambda-\mu|,\ \forall\,\lambda,\mu \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ainsi, g est $\|x\|$-Lipschitzienne (se rappeler cette définition), donc continue (pourquoi ?).

(e) La forme φ définie par la formule (2) est :

(i) symétrique (item (a));

(ii) linéaire en x (items (c) et (d));

(iii) positive, car d'après l'item (a) $\varphi(x,x) = \|x\|^2 \ge 0$, $\forall\, x \in E$;

(iv) définie, car $\varphi(x,x) = 0 \implies \|x\|^2 = 0 \implies x = 0$.

Ainsi, φ est un produit scalaire. Par ailleurs, ce produit scalaire induit la norme $\|\ \|$, car $\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$, d'après l'item (a).

Conclusions finales.

A. D'après la partie 1 de l'exercice, si une norme est induite par un produit scalaire (réel) alors elle vérifie l'identité du parallélogramme.

B. La partie 2 de l'exercice montre que si l'identité du parallélogramme est satisfaite par une norme (dont on ne sait pas au départ qu'elle a été construite à partir d'un produit scalaire), alors il existe bien un produit scalaire induisant la norme. Ce résultat est un théorème découvert de manière indépendante par les mathématiciens Maurice Fréchet (français), John von Neumann (américano-hongrois) et le physicien allemand Pascual Jordan.