Université Claude Bernard (Lyon 1) 2018-2019 Printemps
UE MathIV Algèbre Géométrique L2

Fiche 7

Exercice 1. Série de Fourier - étude d'un cas
On considère une fonction f de période 2π, définie par $x \mapsto ch(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de la série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 2. Série de Fourier - étude d'un cas
On considère une fonction f de période 2π, définie par $x \mapsto \cos(\alpha x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de la série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. Montrer que $\displaystyle\frac{\pi}{\alpha \sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - 5n^2}$.

Exercice 3. Série de Fourier - fonction 2-périodique Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ -1 & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$. Lorsque c'est possible, exprimer $f(x)$ comme la somme d'une série de la forme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega x)$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et les a_n, b_n des coefficients réels.

Exercice 4. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

Exercice 5. Série de Fourier - étude d'un cas

1. Déterminer ledéveloppement en série de Fourier de la fonction f paire 2π-périodique et définie par $f(x) = x$ sur $[0, \pi[$. En déduire les valeurs des séries

$$\textbf{a. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \textbf{b. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}, \quad \textbf{c. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{et } \textbf{d. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

2. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction g impaire 2π-périodique et définie par $g(x) = x$ sur $[0, \pi[$. Retrouver la valeur de la séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 6. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique et définie sur l'intervalle $]-pi, \pi]$ par $f(x) = e^x$. Étudier la convergence de cette série. Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (voir l'exercice 1) .

Exercice 7. Soit la fonction f paire, 2π-périodique et définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Est-ce que f est partout égale à la somme de la série de Fourier ?
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation en formulation réelle puis en formulation complexe.
4. En déduire la valeur des sommes suivantes $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

   Indication : pour la deuxième somme on peut utiliser l'égalité de Parseval.
5. En remarquant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$