Fiche 6

Exercice 1. *Rappel* : une similitude est une transformation qui multiplie toutes les distances par une constante fixe, appelée son rapport. Les similitudes de rapport 1 sont des isométries - les rotations et les symétries sont des similitudes de rapport 1.

Donnez, pour chaque application linéaire H du plan $\mathbb{R}^2$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, la matrice de H.

1. Symétrie d'axe **a**) Ox, **b**) Oy, **c**) $y = x$, **d**) $y = -x$;
2. Projection orthogonale sur **a**) Ox, **b**) Oy, **c**) $y = x$;
3. Homothétie de centre O et de rapport 2;
4. Rotation de centre O et d'angle **a**) $-90°$, **b**) $180°$, **c**) $+30°$, **d**) $\theta \in \mathbb{R}$;
5. Cisaillement : $(x, y) \mapsto (x + ky, y)$.

Lesquelles parmis ces applications sont des similitudes ? Des isométries ?

Exercice 2. On se place dans l'espace euclidien R^3 et on désigne par C le cube unité *usuel* centré en $(0, 0, 0)$. Donner la matrice dans la base canonique des endomorphismes suivants :

1. la rotation de $\frac{\pi}{2}$ d'axe passant par le centre $O = (0, 0, 0)$ et le point $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$
2. la rotation de π d'axe passant par O et le point $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$
3. la rotation de $\frac{2\pi}{3}$ d'axe passant par O et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
4. la réflexion dont le plan fixe a pour equation $y + z = 0$.

A titre informatif : Voici la liste des 48 endomorphismes orthogonaux qui conservent les sommets du cube.

1. l'identité,
2. les 9 rotations de $\frac{\pi l}{3}$, $1 \leq l \leq 3$, d'axe passant par O et le centre d'une face,
3. les 6 rotations de π d'axe passant par O et le milieu d'une arête,
4. les 8 rotations de $\frac{2\pi l}{3}$, $1 \leq l \leq 2$, d'axe passant par O et un sommet de C.
5. l'homothétie ι de centre O et de rapport -1 (i.e. la symétrie centrale de centre O),
6. les composées $\iota \circ \rho$ où ρ est l'une des 23 rotations non triviales décrites en (2), (3), (4).

Exercice 3.

1. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite du plan d'équation $y = 3x$.
   (a) Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{D}_1$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_1$.
   (b) Calculer la distance du point $M_1 = (3, -1)$ à la droite $\mathcal{D}_1$.
2. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite de l'espace passant par $A_2 = (1, 0, 2)$ et admettant $(1, 3, 0)$ et $(0, 1, 1)$ pour normales.
   (a) Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{D}_2$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_2$.
   (b) Calculer la distance du point $M_2 = (5, 3, 4)$ à la droite $\mathcal{D}_2$.

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et u et v deux vecteurs non nuls de E.

1. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme $\frac{u}{\|u\|}$ en $\frac{v}{\|v\|}$. On rappelle que l'on appelle alors (mesure de l')angle orienté de vecteurs $\widehat{(u, v)}$ une mesure θ de l'angle de la rotation r.
2. Soit $w \in E$ non nul. Montrer que $\widehat{(u, w)} \equiv \widehat{(u, v)} + \widehat{(v, w)}$ $[2\pi]$.

3. Notons $\theta = \widehat{(u,v)}$. Montrer que $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$ et $\det(u,v) = \|u\|\|v\|\sin(\theta)$.
4. Soit f un endomorphisme orthogonal de E.
   (a) On suppose que f est direct. Montrer que $(\widehat{f(u), f(v)}) \equiv \widehat{(u,v)}$ $[2\pi]$.
   (b) On suppose que f est indirect. Montrer que $(\widehat{f(u), f(v)}) \equiv -\widehat{(u,v)}$ $[2\pi]$.
   (c) Application : Soit (ABC) un triangle isocèle en A (*i.e.* tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$). Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ $[2\pi]$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Déterminer l'expression dans la base $\mathcal{B}$ du produit vectoriel de deux vecteurs u et v de E en fonction de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.
2. Soient u, v deux vecteurs normés orthogonaux de E et $w \in E$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base orthonormée de E si et seulement si $w = \pm u \wedge w$. À quelle condition cette base est-elle directe ?
3. Application : Déterminer toutes les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$.
4. Démontrer la formule du double produit vectoriel :
$$\forall (u,v,w) \in E, \quad u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w.$$
5. Soient $a, b, c \in E$ non nuls. On note $a' = b \wedge c$, $b' = c \wedge a$, $c' = a \wedge b$ et $v = \|a\|a' + \|b\|b' + \|c\|c'$. On suppose que $v \neq 0$. Montrer que : $\cos\widehat{(v,a)} = \cos\widehat{(v,b)} = \cos\widehat{(v,c)}$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté.

1. Soient w un vecteur unitaire de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la rotation r d'angle θ autour de l'axe D dirigé et orienté par le vecteur w.
   (a) Soit $x \in E$ un vecteur orthogonal à w. Montrer que $r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta) w \wedge x$.
   (b) On suppose désormais que x est un vecteur unitaire orthogonal à w. Montrer que
$$\cos(\theta) = \langle x, r(x)\rangle \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = [x, r(x), w] = [w, x, r(x)]$$
   où $[a, b, c]$ désigne le produit mixte des vecteurs $a, b, c \in E$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur $w = (1, 1, 0)$.

Exercice 7. On se place dans $\mathbb{R}^3$ (orienté par la base canonique usuelle).

1. On considère un parallélopgramme engendré par deux vecteurs (non nuls) u et v. Exprimer la valeur absolue de l'aire du parallélogramme en fonction du produit vectoriel de u et v.
2. On considère $(OABC)$ un trièdre rectangle, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient orthogonaux deux à deux. Montrer que le carré de l'aire du triangle (ABC) est égal à la somme des carrés des aires des trois autres triangles (OAB), (OBC) et (OCA).

Exercice 8. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y = 4$.

1. Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.
2. Calculer la distance du point $M = (6, 6, 7)$ au plan $\mathcal{P}$.