

Fiche 4

Exercice 1. Une forme linéaire

On considère un élément ϕ dans $(\mathbb{R}^3)^*$, l'espace dual de \mathbb{R}^3 (= l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$). On dit que ϕ est une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 , car $\phi \in (\mathbb{R}^3)^*$ est caractérisé par les coefficients α, β, γ de son action sur un vecteur quelconque :

$$\phi \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Soient

$$\phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0, \quad \phi \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 1, \quad \phi \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 4.$$

1. Déterminer α, β, γ pour décrire la forme linéaire ϕ .
2. Trouver le sous-espace annulé par ϕ , autrement dit le noyau de la forme linéaire $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 2. Une base de $(\mathbb{R}^2)^*$

Soient ϕ_1, ϕ_2 les deux éléments de $(\mathbb{R}^2)^*$ définis par $\phi_1 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = x + y$ et $\phi_2 \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = x - y$. Montrer que (ϕ_1, ϕ_2) forment une base de $(\mathbb{R}^2)^*$. Exprimer les formes linéaires suivantes dans la base (ϕ_1, ϕ_2) :

$$g \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = x, \quad h \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = 2x - 6y.$$

Exercice 3. Formes linéaires multiplicatives sur les matrices

Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\phi(AB) = \phi(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Vérifier que la trace d'une matrice $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est bien un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.
2. Choisir les matrices E_{ij} (avec 1 en ligne i et colonne j et 0 ailleurs) pour une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et voir l'action de ϕ sur le produit de deux éléments de la base : $\phi(E_{ij}E_{kl})$. Dans quel cas $\phi(E_{ij}E_{kl})$ n'est pas nul ?
3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(M) = \lambda \text{tr}(M)$.

Exercice 4. Endomorphisme adjoint

Soit v un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On définit $v^* \in \mathbf{End}(E)$ par $\langle v^*(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$ pour $\forall x, y \in E$. Montrer que :

$$\text{Ker}(v^*) = (\text{Im } v)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Im}(v^*) = (\text{Ker } v)^\perp.$$

En déduire $\text{rg}(v) = \text{rg}(v^*)$.

Exercice 5.

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Montrer que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^* \circ u)$.

Exercice 6. Endomorphisme symétrique

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0$. Quelles sont les valeurs propres possibles de u ? En déduire l'expression pour u .

On rappelle qu'un endomorphisme symétrique est diagonalisable.

Exercice 7. Rappels du cours

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Démontrer les équivalences suivantes :

- u est orthogonal \iff pour toute base orthonormée \mathcal{B} de E , la matrice de u dans \mathcal{B} est orthogonale
 \iff il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est orthogonale.

et

- u est autoadjoint \iff pour toute base orthonormée \mathcal{B} de E , la matrice de u dans \mathcal{B} est symétrique
 \iff il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

Exercice 8.

On se place dans un espace euclidien E de dimension 3. Soit u un endomorphisme orthogonal de E tel que $\det(u) = 1$.

1. Montrer que u admet au moins une valeur propre (nécessairement réelle).
2. Montrer que 1 est une valeur propre de u . Est-ce forcément la seule ?
3. Soit e_1 un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1 de norme 1.
 - (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E prolongeant e_1 .
 - (b) Quelle forme a la matrice de u dans cette base ?

Exercice 9.

Soit E un espace euclidien.

1. On suppose que $u \in \mathbf{End}(E)$ est un endomorphisme orthogonal.
 - (a) Quelle peut être la valeur du déterminant de u ?
 - (b) Quelles sont les valeurs propres (nécessairement réelles) de u ?
2. Quelles sont les projections orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?
3. Quelles sont les symétries orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?

Exercice 10. Groupe orthogonale en dimension 2

On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille 2×2 . Le but de l'exercice est de les expliciter.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
- (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c) .
- (c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ et $R_{\theta'}$ commutent. Les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?
4. On se place dans un plan euclidien E muni d'une base orthonormée \mathcal{B} .
 - (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ dans la base \mathcal{B} .
 - (b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristiques, de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans \mathcal{B} est donnée par

$$A = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.

Soient a et b deux réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ a-t-on A orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est A .

Exercice 13.

On considère u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est autoadjoint. Justifier l'existence, puis expliciter une matrice P orthogonale pour laquelle $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 14.

On considère la matrice symétrique

$$B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer B^2 et en déduire que B est orthogonale. Justifier l'existence puis déterminer une matrice Q orthogonale pour laquelle $Q^{-1}BQ$ est diagonale.

Exercice 15.

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel.

1. Montrer que

$$f(x) = x + k\langle x, a \rangle a$$

définit un endomorphisme symétrique de E .

2. Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Exercice 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^tMN).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = {}^tAMA + AM{}^tA.$$

Montrer que Φ est un endomorphisme autoadjoint. Φ est-il diagonalisable ?