Fiche 2

Exercice 1 (Changement de base $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.)
Soit $E = \mathbb{R}^2$ avec la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$.

Pour deux vecteurs arbitraires $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ on définie une forme bilinéaire β par la formule

$$\beta(U, V) = aa' + 2ab' + 2a'b + 5bb'.$$

Soit $\mathcal{B}'$ une base formée de vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter M, la matrice de β dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Calculer la matrice de la forme β dans la base $\mathcal{B}'$ de deux façons différentes :
   (a) en multipliant les vecteurs f_i et f_j pour tous $i, j \in \{1, 2\}$;
   (b) en calculant la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ et en utilisant la formule $M' = {}^tPMP$.

Exercice 2 (Changement de base $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.)
Soit $E = \mathbb{R}^3$ avec la base canonique.

Pour deux vecteurs arbitraires $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ on définie une forme bilinéaire ϕ par la formule $\phi(v_1, v_2) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$. Soit M la matrice de la forme billinéaire ϕ dans la base canonique (expliciter !)

Soit B une base formée de vecteurs $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calculer la matrice de la forme ϕ dans cette base B de deux façons différentes :

1. en multipliant les vecteurs h_i et h_j pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$;
2. en calculant la matrice de passage C de la base canonique vers la base B et en utilisant la formule $M' = {}^tCMC$.

Rappel.
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidean, A une partie de E. L'orthogonal de A est l'ensemble, noté $A^\perp$, consitué de vecteurs de E ortogonaux à tous les vecteurs de A : $A^\perp = \{x \in E | \ \forall a \in A, \langle a, x\rangle = 0\}$.

Exercice 3 (Gram-Schmidt, exemples).
I. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.

1. Trouver une base orthonormée pour le plan $(2, -3, 6)^\perp$.
2. Montrer que (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Trouver une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que e_1 soit colinéaire à u_1, et que le plan engendré par e_1 et e_2 soit égal à celui engendré par u_1, u_2.

II. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} b & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P, Q) & \longmapsto & \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt \end{array}$$

définit un produit scalaire sur E.

2. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, construire à partir de $(1, X, X^2, X^3)$ une base orthonormée.

Exercice 4 (Calcul d'orthogonaux)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on définit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\langle X, Y \rangle = {}^tXAY$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer une base pour chacun des orthogonaux de $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et de $X = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 5 (La géométrie des matrices)

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (A, B) & \longmapsto & \text{tr}(A\ {}^tB) \end{array}$$

(a) Montrer que ϕ définit un produit scalaire.

(b) Déterminer une base orthonormée pour le sous-espace S des matrices symétriques.

(c) Écrire une matrice arbitraire de E comme combinaison linéaire de ses coordonnées dans S et $S^\perp$.

(d) Déterminer la distance d'une matrice arbitraire de E à S.

(e) On fixe la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base orthonormée pour $A^\perp$.

(f) Déterminer pour une matrice arbitraire de E sa projection orthogonale sur $A^\perp$.

Exercice 6 (La géométrie des polynômes)

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des polynômes de degré au plus 3, à coefficients réels. On munit E du produit scalaire suivant :

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 .$$

On définit $H = \{P \in E : P(1) = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3.
2. Déterminer une base orthonormée de H.
3. Déduire du point précédent la projection orthogonale de X sur H. Compléter la base que vous avez déterminée dans le point précédent à une base de E de votre choix, et écrire la matrice de la projection orthogonale sur H dans cette base.
4. Déterminer la distance d'un polynôme de E à H en fonction de ses coefficients.