# Algèbre géométrique : chapitre 4

## Endomorphismes d'espace euclidien



### 4.1 Dualité dans les espaces euclidiens

Soit $E$ un espace euclidien.

Si on fixe $a \in E$ l'application

$$\varphi_a : E \longrightarrow \mathbb{k}$$
$$x \longmapsto \langle a, x \rangle$$

**Proposition** : $\varphi_a$ est une applic. linéaire (= forme linéaire) de noyau $\{a\}^\perp$

**Preuve.** $\varphi_a(\lambda x + \mu y) = \langle a / \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle a/x \rangle + \mu \langle a/y \rangle$

$$= \lambda \varphi_a(x) + \mu \varphi_a(y)$$

Aussi $x \in \ker \varphi_a \iff \langle a/x \rangle = 0 \Rightarrow x \in \{a\}^\perp$

L'orthogonale à un vecteur est de dim. $n-1$ est appelé un hyperplan.

**Prop.** Soit $\mathcal{B} = \langle e_1, \ldots e_n \rangle$ une base orthonormée et $H$ un hyperplan de $E$

Un vecteur $n = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$ est normal à $H$ ssi $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$ est une équation de $H$ dans $B$

**Exemple** : dans $\mathbb{R}^3$ le plan de vect. normale $n = (1, 2, -1)$ a pour équation $x + 2y - z = 0$

**Remarque**

De la proposition suit que $\dim(\operatorname{Im} \varphi_a) = 1$ et $\dim(\ker \varphi_a) = n-1$ si $n = \dim E$.

**Déf** $E$ - $\mathbb{k}$ esp. vect.
L'ensemble de toutes les applic. linéaires $E \to \mathbb{k}$ est un esp. vect. noté $E^*$ (ou $\mathcal{L}(E,\mathbb{k})$) appelé le dual de $E$.
Ces éléments - les applic. linéaires - on appelle les formes linéaires

**Exemples** - Si $E = \mathbb{k}^n$, $(x_1, \dots x_n) \mapsto x_i$ est une forme linéaire sur $E$

- Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentiable en $a$ la la differentielle $D_a(f)$ est une forme linéaire
- $M \to tr\, M$ est une forme linéaire sur $Mat_n(\mathbb{k})$

## Espace dual

**Thm** (Representation) Soit $E$ un esp. euclidien de dimension $n$. Alors

$$\varphi : E \to E^* \quad t.q. \quad \varphi_x(y) = \langle x, y \rangle$$
$$x \mapsto \varphi_x$$

est un isomorphisme des espaces vectoriels

**Preuve** : $\varphi$ est linéaire $\forall x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{k}$

$$\varphi(\lambda x_0 + \mu y_0) = \varphi_{\lambda x_0 + \mu y_0} = \lambda \varphi_x + \mu \varphi_y$$

On va montré $\forall f \in E^*$, $\exists !\, a \in E$, t.q. $f = \varphi_a$

$f$ est une appl. linéaire $f : E \to \mathbb{R}$

On a $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R} = 1$

Du thm du rang on a $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = n$

Donc $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$. Choisissons un vecteur $x_0 \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Alors $\boxed{a = \dfrac{f(x_0)}{\langle x_0, x_0 \rangle} x_0}$

En effet : soit $y \in E$

$$\varphi_a(y) = \left\langle \frac{f(x_0)}{|x_0|^2} x_0, y \right\rangle = \frac{f(x_0)}{|x_0|^2} \langle x_0, y \rangle$$

Comme $y = y_1 + y_2$ où $y_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $y_2 \in (\operatorname{ker} f)^\perp$

On a $f(y) = f(y_2)$ et comme $(\operatorname{ker} f)^\perp$ est de dim 1 et $x_0 \in (\operatorname{ker} f)^\perp$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $y_2 = \alpha \cdot x_0$ et alors

$$f(y) = f(y_2) = \alpha f(x_0)$$

mais $\langle x_0, y \rangle = \langle x_0, y_2 + \alpha x_0 \rangle = \alpha \langle x_0, x_0 \rangle$

$\Rightarrow \varphi_a(y) = \frac{f(x_0)}{\langle x_0, x_0 \rangle} \alpha \langle x_0, x_0 \rangle = \alpha f(x_0) = f(y)$ !

C'était une démonstration constructive.
Une autre démonstration par des considérations de dimension :

$\varphi$ est <u>injective</u> car si $a \in \ker \varphi$ alors $\varphi_a(x) = 0$ et en partic. si $x = a$ on a $\varphi_a(a) = \langle a | a \rangle = 0$ $\Rightarrow a = 0$. $E$ et $E^*$ sont deux espaces <u>de même dim. $< \infty$</u>. Toute appl. injective est bijective $\Rightarrow \varphi$ est un isomorphisme de $E$ et $E^*$.

Pour montrer que $\dim E^* = \dim E = n$ on peut construire une base de $E^*$.
Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $E$, on défini $\{f^1, \dots, f^n\}$ — $n$ éléments de $E^*$ comme suit :

$$f^i(e_j) = \delta^i_j \quad \Bigg( \underbrace{\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}}_{\text{symbol de Dirac}} \Bigg), \quad f^i \text{ — appl. lin. à valeurs réelles}$$

C'est <u>une base</u> car

(1) c'est une famille indépendante

$c_1 f^1 + \dots + c_n f^n = 0$

appliqué à $e_i$ donne

$$\underbrace{c_1 f^1(e_i) + \dots}_{0} + c_i f^i(e_i) \underbrace{+ \dots + c_n f^n(e_i)}_{0} = 0$$

on a $c_i f^i(e_i) = 0 \Rightarrow c_i = 0$

(2) Engendre $E^*$ : soit $\omega \in E^*$

on applique $\omega$ à un élément de $E$ : $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$

$$\lambda_1 \omega(e_1) + \dots + \lambda_n \omega(e_n) = \lambda_1 \omega(e_1) f^1(e_1) + \dots + \lambda_n \omega(e_n) f^n(e_n)$$

$$= \omega(e_1) f^1(\lambda_1 e_1) + \dots + \omega(e_n) f^n(\lambda_n e_n)$$

$$= \omega(e_1) f^1(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \dots + \lambda_n e_n) + \dots + \omega(e_n) f^n(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$$

$$= (\omega(e_1) f^1 + \dots + \omega(e_n) f^n)(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$$

Donc $\omega = \omega(e_1) f^1 + \dots + \omega(e_n) f^n$. En conclusion : $\forall \omega \in E^*$ se présente comme combinaison linéaire de $f^1, \dots f^n$.

---

## 4.2 Adjoint d'un endomorphisme

Dans la suite, on considère l'espace des applications linéaires de $E$ vers $E$, noté $End(E)$

où $E$ - un espace euclidien.

**Déf** Soit $U \in End\, E$. On dit que $V \in End\, E$ est adjoint de $U$ si $\forall (x,y) \in E \times E$

$$\langle x, U(y) \rangle = \langle V(x), y \rangle$$

**Rq** Pour $E$ euclidien

Par symétrie $u$ - adjoint de $V \Leftrightarrow V$ adjoint de $u$

**Thm** Soit $U \in End\, E$. Alors $U$ admet un unique endom. adjoint. On le note $U^*$.

**Preuve** Par le thm de representation:

Soit $y \in E$ on pose $f_y : x \mapsto \langle u(x) | y \rangle$

c'est une appl. linéaire d'où il existe un unique $y_0 \in E$ t.q.

$$f_y = \varphi_{y_0} \quad t.q.\ \forall x \quad f_y(x) = \varphi_{y_0}(x)$$

$$\langle u(x) | y \rangle = \langle x | y_0 \rangle$$

On pose $u^*$ l'applic qui à $y$ associe $y_0$. $u^*$ est linéaire (par linéar. de $u$)

**Expressions matricielles:**

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $E$.

$X = (x_1 \dots x_n)$ - coord. de $x$

$Y = (y_1 \dots y_n)$ - coordonnée de $y$

dans $\mathcal{B}$

Soit $M$ - matrice de $u$ dans $\mathcal{B}$

$M^*$ - matrice de $u^*$ — " —

dans une base orthonormée: $\langle x | y \rangle = {}^t x\, I\, y = {}^t x \cdot y$

$I$ - matrice identité - matrice de produit scalaire

On a $\langle x \mid u(y) \rangle = {}^tX M Y$

et $\langle u^*(x) \mid y \rangle = {}^t(M^* X)\, Y = {}^tX\, {}^tM^* Y$

On a donc $M^* = {}^tM$

Remarque : Si $\mathcal{B}$ une base quelconque et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\langle\, ,\, \rangle)$ - la matrice de produit scalaire : ${}^tM^* = A M A^{-1}$ (Calcul !)

Lemme (1) L'application $u \longrightarrow u^*$ est linéaire (semi-lin. si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$(u + u')^* = u^* + u'^*$ , $(\alpha U)^* = \alpha U^*$

(2) $(U V)^* = V^* U^*$ , $(U^*)^* = U$

(3) Si $U$ est inversible $U^*$ l'est aussi $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Def : Un endomorphisme $U$ est dite auto-adjoint (ou symétrique) si $U = U^*$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ cela donne : $U$ est auto-adj. $\Leftrightarrow$ sa matrice dans une base orthon. est symétrique $M = {}^tM$

Trois cas étudiés en profondeur :

- auto-adjoint si $u^* = u$
- orthogonal si $u^* = u^{-1}$
- normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$

<u>Exemple</u> toute proj orthogonale $P_F$ vérifie $P_F = P_F^2 = P_F^*$ – autoadjointe.

En effet : si $\{e_1, \dots e_k\}$ une base orthon. de $F$ et $\{e_{k+1} \dots e_n\}$ de $F^\perp$

on a $\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_n\}$ une base orthonorm. de $E$ et $A = Mat_{\mathcal{B}} P_F = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = A^2 = {}^tA$$

<u>Exo</u> Si $f = f^* = f^2$ alors $f = P_F$ pour un certain s.e.v. $F \subseteq E$

Comment trouver $F$ ?

## 4.3. Endomorphismes orthogonaux (Chap 6 pour étude en détail)

$u^* = u^{-1}$

$$\langle ux \mid uy \rangle = \langle u^* u x \mid y \rangle = \langle x \mid y \rangle$$

- préserve le produit scalaire
- préserve la norme.

Soit $O \in Mat_n(\mathbb{R})$ une matrice t.q. $O^{-1} = {}^tO$ – dite orthogonale

<u>Lemme</u> Toutes les valeurs propres (complexes) de $O$ sont de module 1

<u>Lemme'</u> soit $U \in Mat_n(\mathbb{C})$ t.q. $U^{-1} = {}^t\overline{U}$ (dite unitaire)

alors toutes les valeurs propres de $U$ sont de module 1.

Remarque ~~Ainsi~~ Si le dét de $O$ ou de $U$ est de module 1

Démo : Soit $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$UX = \lambda X$ et posons $\|X\|^2 = \langle X | X \rangle = {}^t\bar{X} X = \sum |x_i|^2 > 0$

alors $\langle X | X \rangle = {}^t\bar{X} X = {}^t\bar{X} ({}^t\bar{U} U) X$

$= {}^t\overline{UX}\, UX = (\bar{\lambda}\, {}^t\bar{X})(\lambda X) = \lambda \bar{\lambda} \|X\|^2$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = \lambda \bar{\lambda} = 1$

Lemme Soit $B$ $(e_1 \dots e_n)$ une base orthonormée et $B' = (e_1' \dots e_n')$ une base quelconque, $P$ - matrice de passage

Alors $P$ est orthogonale ssi $B'$ est orthonormée.

Lemme Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale ssi ces colonnes (lignes) forment une base orthonormée par rapport au produit scalaire standard

# Endomorphisme symétrique

Un endomorphisme $u : E \to E$ est dite symétrique s'il vérifie : $\dim E = n$

$$\forall x, y \in E \ , \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

**Propriétés :**

I Soit $u : E \to E$ un endomorphisme symétrique, alors :

1. La matrice de $u$ dans une base orthonormale est symétrique
2. le polynome caracteristique de $u$ a $n$ racines réels
3. Les s.esp. propres relatifs à deux valeurs propres distincts sont orthogonaux
4. $\exists$ une base orthonormales de $E$ formée de vect. propres de $u$.

$u$ est donc diagonalisable dans une base orthonormale.

II Soit $A$ une matrice sym. réelle
$q$ - forme quadratique associée.

Alors $q$ est :

1. positive ssi les valeurs propres de $A$ sont positives.

2. définie positive ssi les valeurs propres sont strictem. positives.

III Théo. Soit $f$ une forme bilinéaire $q$ - la forme quadratique associée. Il existe alors une base orthonormale de $E$ qui est orthogonale pour $f$.