Chapitre 3. Orthogonalé

E e.v. réel (ou complexe) avec un produit scalaire (ou hermitien)

3.1. Vecteurs et ss espaces orthogonaux :

Déf $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. On note $x \perp y$

Rq. Pour un e.v. complexe on a bien
$\langle x, y\rangle = 0 \iff \langle y, x\rangle = 0$

- F_1, F_2 ss.e.v. de E sont orthogonaux ssi $\langle x, y\rangle = 0 \quad \forall x \in F_1$ et $\forall y \in F_2$.
On note $F_1 \perp F_2$

- On dit qu'une famille de vect. $\{y_1, \dots, y_k\}$ est orthogonale si $\langle y_i, y_j\rangle = 0$ pour $\forall (i, j) \in [\![1, k]\!]^2$, $i \neq j$.
Si de plus on a $\|y_i\| = 1 \ \forall i$ on on dit que $\{y_1, \dots y_n\}$ est une famille **orthonormée**

Exemples :
- base canonique $\mathbb{R}^n$
- $(1, \cos nx, \sin nx)_{n \geq 1}$ orthog. pour $\int_0^{2\pi} fg$
et $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\right)$ - orthonormé

On verra que si $\dim E < \infty$ il existe une base orthonormée.

Prop. 1) $(y_1, \dots y_n)$ famille orthogonale de vecteurs non nuls alors elle est libre. (En particulier, famille orthonormée est libre)

2) $F_1 = \text{Vect}(x_1, \dots x_k)$, $F_2 = \text{Vect}(y_1 \dots y_p)$ alors $F_1 \perp F_2 \iff x_i \perp y_j \quad \forall (i,j) \in [1,k] \times [1,p]$

3) $F_1 \perp F_2 \implies F_1 \cap F_2 = \{0\}$

Déf $X \in F$, $X^\perp := \{y \in F, \ \forall x \in X \ \langle x,y \rangle = 0\}$

Rmq $X \perp X^\perp$

Prop 1) $X^\perp$ est un s.s-e.v. de E

2) $\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0\}$

3) $F \subseteq G$, $G^\perp \subseteq F^\perp$

4) $v_0^\perp = (\text{Vect } v_0)^\perp$ et plus généralement

$F^\perp = (\text{Vect } F)^\perp$

5) $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$

6) $F \subset (F^\perp)^\perp$

7) $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

$\Big\}$ F, G ss.e.v.

Rq 7 et 8 sont des égalités lorsque E est de dim fini.

3.2 Thm de Pythagore

$(E, \langle\, ,\, \rangle)$. $e_1, \dots e_k \in E$

Prop : 1) $e_1 \perp e_2 \iff \|e_1+e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$

2) Si la famille $e_1, \dots e_k$ est orthogonale alors $\|e_1+\dots+e_k\|^2 = \|e_1\|^2 + \dots + \|e_k\|^2$

3) Si $x = \sum x_i e_i$ $(e_1, \dots e_n)$. famille orthogonale
$y = \sum y_i e_i$

$$\|x\|^2 = \sum |x_i|^2 \|e_i\|^2$$

(pour réel car $|x_i|^2 = x_i^2$
complexe $|x_i|^2 = \bar{x}_i x_i$)

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i y_i \|e_i\|^2$$

On a $\boxed{x_i = \frac{\langle e_i, x\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}}$

Exo si la famille $(e_1, \dots e_k)$ est orthonormée

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, x\rangle e_i$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 = \sum |\langle e_i, x\rangle|^2$$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i y_i = \sum \overline{\langle e_i, x_i\rangle} \langle e_i, y\rangle$$

$$= \sum \langle x, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle$$

3.3) Exemples d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Exemple 1. $h = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$e_1 = h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = h_2 - \frac{\langle h_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 $h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e_1 = h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = h_2 - \frac{\langle h_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = h_3 - \frac{\langle h_3, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle h_3, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0$$

On peut normer ces vecteurs :

$$\tilde{e}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ex. 3 $E = \mathbb{R}^3$ produit scalaire usuel

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ - plan

Calculer $p_F(e_1) = p_F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gram-Schmidt : base orthogonale de F

$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = v_2 - \frac{\langle f_1, v_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On remarque : F engendré par deux vecteurs. C'est un plan. Dans ce plan on prend v_1 et

on choisi dans ce plan un

vect. orthogonale au v_1.

Ex 4. Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, polynôme de deg ≤ 2.

Produit scalaire : $\int_{-1}^{1} P(t) Q(t)\, dt$

Vecteur $1, t, t^2$ définis une base de R

Orthogonalisation :

$e_1 = 1$, $e_2 = t + \alpha \cdot 1$

$0 = \langle t + \alpha \cdot 1 \mid 1 \rangle = \int_{-1}^{1} (t + \alpha) \cdot 1\, dt = 2\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow e_2 = t$

$e_3 = t^2 + \beta t + \gamma \cdot 1$

$$0 = \langle t^2 + \beta t + \gamma \cdot 1 \mid 1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 + \quad + \gamma \, dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{3}$$

$$0 = \langle t^2 + \beta t + \underbrace{\gamma \cdot 1 \mid t}_{0} \rangle = \int_{-1}^{1} t^3 + \beta t^2 \, dt$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1}}_{0} + \beta \left[t^3\right]_{-1}^{1} \Rightarrow \beta = 0$$

Si on divise encore chaque vect. par sa norme $\rightsquigarrow$ base orthonormée.

Espace $\mathbb{R}_{n-1}[x]$

Base $1, t, t^2, \ldots t^{n-1} \rightsquigarrow 1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t, \ldots$ à une multipl. par des const près

Ce sont de polynômes de Legendre qui forment une base ortogonale :

$$\frac{1}{2^k \cdot k!} \frac{d^k (t^2 - 1)^k}{dt^k}$$

Orthogonalité.

Cours 3
14.02.2019

<u>Rappel</u> de la dernière fois

<u>Prop</u>. Soit $\{u_1, \dots, u_m\}$ une famille de vecteurs non-nuls deux-à-deux orthogonaux alors cette famille est libre

<u>Démo</u>: Il faut m.q. si

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m = 0 \text{ alors}$$

$$c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

On a $\langle 0 | u_1 \rangle = \langle c_1 u_1 + \dots + c_m u_m | u_1 \rangle$
$= c_1 \langle u_1 | u_1 \rangle + c_2 \langle u_2 | u_1 \rangle + \dots + c_m \langle u_m | u_1 \rangle$
$= c_1 \langle u_1 | u_1 \rangle$

$\Rightarrow 0 = c_1 \cdot \langle u_1 | u_1 \rangle$. Si $u_1 \neq 0$ alors

$\langle u_1 | u_1 \rangle \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0$

en regardant le produit scalaire de $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_n$ avec $u_2, u_3 \dots u_m$ on conclut que $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ … $c_m = 0$

c.q.f.d.

3.4. Projection orthogonale.

déf : soit F un ss espace vect. de E
On dit que un vecteur v est orthogonal à F si il est orthogonal à tout vecteur de F.

Remarque Si le vecteur g est orthogonal aux $f_1, \dots, f_m$ alors g est orthogonal aux combinaisons linéaires de $f_1, \dots, f_m$: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m$ $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Car si $\langle g, f_i \rangle = 0, \forall i$ on a

$$\langle g, \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m \rangle = \lambda_1 \langle g, f_1 \rangle + \lambda_2 \langle g, f_2 \rangle + \dots + \lambda_m \langle g, f_m \rangle = 0$$

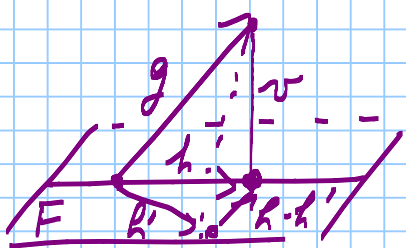
Alors pour que g soit orthogonal à un sous espace F il suffit que g soit orthogonal aux éléments de la base de F.

Soit $F \subset R$ et un vecteur $g \notin F$ à priori g n'est pas orthogonal à F. On cherche à trouver la décomposition de g en somme $g = h + v$ t.q. $h \in F$ et $v \perp F$

h - est une <u>projection orthogonale</u> de g sur F.

Ce plm. a toujours une solution et une seule.

On va m.q. le vecteur perpendiculaire donne la distance la plus courte d'un point à un sous-espace.



Soit $h' \in F$ t.q. $h' \neq h$

On va m.q. $|g - h'| > |g - h|$

On remarque $h - h' \in F$

$\Rightarrow (h - h') \perp v$, Pythagore :

$$|h - h'|^2 + |g - h|^2 = |g - h'|^2$$

$$\Rightarrow |g - h'| > |g - h|$$

En pratique ? Comment trouver la projection orthogonale de g ?

Soit $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ une base de F

On cherche $h = c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$

ou on trovera les coeffts $c_1, c_2, \dots, c_m$ de la condition

F.

Pour cela il faut et il suffit :
que $\langle g-h \mid f_k \rangle = 0$, $\forall k=1,\dots m$ ou bien

$$\langle h \mid f_k \rangle = \langle g \mid f_k \rangle$$

$\Rightarrow \langle c_1 f_1 + \dots + c_m f_m \mid f_k \rangle = \langle g \mid f_k \rangle \quad \forall k=1,\dots m$

Pour trouver $c_1, \dots c_m$ on a m équs. :

$$c_1 \langle f_1 \mid f_k \rangle + c_2 \langle f_2 \mid f_k \rangle + \dots + c_m \langle f_m \mid f_k \rangle = \langle g \mid f_k \rangle \quad (*)$$

Si $\{f_1, \dots f_m\}$ est une base orthonormale alors $c_k = \langle g \mid f_k \rangle$ car $\langle f_\ell \mid f_k \rangle = \begin{cases} 1, & \ell = k \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

Puisque dans chaque sous-espace F de dim m on peut trouver une base orthonormée pour tout vecteur $f \in E$ il existe et une seule projection orthogonale h sur F.

Mais cela aussi signifie que dans une base quelconque le système $(*)$ a une solution et une seule. Donc le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} \langle f_1 \mid f_1 \rangle & \langle f_2 \mid f_1 \rangle & \dots & \langle f_m \mid f_1 \rangle \\ \langle f_1 \mid f_2 \rangle & \langle f_2 \mid f_2 \rangle & \dots & \langle f_m \mid f_2 \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle f_1 \mid f_m \rangle & \dots & \dots & \langle f_m \mid f_m \rangle \end{pmatrix} \neq 0$$

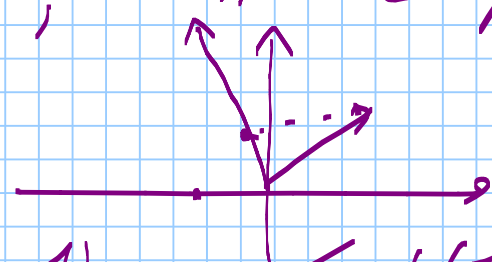
C'est un déterminant de Gram-Schmidt de la famille de vecteurs $\{f_1, f_2 \dots f_m\}$.

<u>Exemple</u> basique $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Soit $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trouver la projection orthogonale de g sur F.

On cherche à presenter

$g = h + v$, h – la projection sur F.



$$h = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \left\langle v \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

alors

$$\left\langle g \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = c_1 \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$c_1 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3}{(-1)^2 + 3^2} = \frac{2}{10}$$

$$h = \frac{2}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Projection : $P_F(e_1) = \frac{\langle e_1 | f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 + \frac{\langle e_1 | f_2 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ex 2 $E = \mathbb{R}^3$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ x - y - \sqrt{2} z = 0 \right\}$$

Remarque: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est orthogonale a n'importe quel vecteur de F

D'où $F^\perp = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

et $p_F(e_1) = e_1 - p_{F^\perp}(e_1)$

$$p_{F^\perp}(e_1) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle}{1^2 + (-1)^2 + (-\sqrt{2})^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$p_F(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/4 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Rappel Si F est un sous-espace de l'espace vect. E pour $\forall$ vect. g de E on défini une projection sur F.
g a une unique décomp. $g = v + h$.
où v est un vecteur orthogonal à F. On écrit $v \in F^\perp$ et la projection orthogonal sur F

$$p_F\, g = h$$

Def
Une applic. linéaire
$p : E \longrightarrow E$ est un projecteur
si $\boxed{p \circ p = p}$

C'est un projecteur orthogonale si $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$.

Def Soit $A \subseteq E$. L'orthogonal de A est l'ensemble de vecteurs de E orthogonaux à A :

$$A^\perp = \{ x \in E \mid x \perp A \} = \{ x \in E \mid \forall y \in A \text{ on a } \langle x \mid y \rangle = 0 \}$$

Lemme
Si F est un sous-espace de E
$F^\perp$ est un supplementaire de F:
i.e. $F \oplus F^\perp = E$ (Démo: ~~On~~ complète une base orthog. de F par une base orthog. de $F^\perp$)
En particulier, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.