

Examen finale Algèbre IV 2019 Corrigé

Exercice 1.

On considère $\mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2 :

$$\mathbb{R}_2[X] := \{a_2X^2 + a_1X + a_0, \text{ où } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ on pose $\langle P(X), Q(X) \rangle = P(0) \cdot Q(0) + P(1) \cdot Q(1) + P(2) \cdot Q(2)$.

- Vérifier qu'avec cette application, $\mathbb{R}_2[X]$ est muni d'un produit scalaire.
- On considère le sous-espace F de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par deux monômes :

$$Q_1(X) = 1 \text{ et } Q_2(X) = X.$$

En utilisant la procédé de Gram-Schmidt trouver une base orthonormée de F en commençant par le premier monôme $Q_1(X)$.

- On considère les polynômes $R(X) = X^2$ et $S(X) = X^2 - X + 2$.
 - Trouver la projection $R_F(X)$ de $R(X)$ sur F . Puis trouver la projection $S_F(X)$ de $S(X)$ sur F .
 - Calculer les distances de $R(X)$ et de $S(X)$ à F , les comparer et expliquer le résultat de cette comparaison.

1. Produit scalaire ?
Il faut vérifier

- bilinéaire
- symétrique
- défini positive.

- linéaire à gauche :

$$\begin{aligned} \langle P_1(x) + kP_2(x), Q(x) \rangle &= (P_1(0) + kP_2(0))Q(0) + (P_1(1) + kP_2(1))Q(1) + (P_1(2) + kP_2(2))Q(2) \\ &= P_1(0)Q(0) + P_1(1)Q(1) + P_1(2)Q(2) + k(P_2(0)Q(0) + P_2(1)Q(1) + P_2(2)Q(2)) \\ &= \langle P_1(x), Q(x) \rangle + \langle P_2(x), Q(x) \rangle \end{aligned}$$

- symétrique

$$\langle P(x), Q(x) \rangle = \langle Q(x), P(x) \rangle \text{ - évident.}$$

lin. à gauche + symétrique \Rightarrow bilinéaire.

positive car $\langle P(x), P(x) \rangle = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$ - somme de carrés.

défini positive : $\langle P(x), P(x) \rangle = 0 \Rightarrow P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 = 0$

$$\Rightarrow P(0) = P(1) = P(2) = 0 \Rightarrow P \text{ a au moins 3 racines}$$

mais P est un polynôme de degré ≤ 2

a au plus 2 racines ou $P \equiv 0$. Donc $P \equiv 0$.

$$\boxed{2.} \text{ Soit } \tilde{q}_1 = 1 \quad \|\tilde{q}_1\|^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3, \quad q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1$$

$$\tilde{q}_2 = X - \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, X \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = X - \frac{1}{3} (1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = X - 1$$

$$\|\tilde{q}_2\|^2 = (0-1)(0-1) + (1-1)(1-1) + (2-1)(2-1) = 2, \quad q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$$

3a La projection de P sur un sous-espace F avec une base orthonormée (q_1, q_2) est calculer comme suit: $P_F = \langle P, q_1 \rangle q_1 + \langle P, q_2 \rangle q_2$

Pour R et S on a:

$$\begin{aligned} R_F(x) &= \frac{1}{3} \langle x^2, 1 \rangle 1 + \frac{1}{2} \langle x^2, (x-1) \rangle (x-1) \\ &= \frac{1}{3} (0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1) \cdot 1 + \frac{1}{2} (0^2 \cdot (0-1) + 1^2 \cdot (1-1) + 2^2 \cdot (2-1)) (x-1) \\ &= \frac{5}{3} \cdot 1 + 2 \cdot (x-1) = \boxed{2x - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_F(x) &= \frac{1}{3} \langle (x^2 - x + 2), 1 \rangle \cdot 1 + \frac{1}{2} \langle x^2 - x + 2, (x-1) \rangle (x-1) \\ &= \frac{1}{3} ((0 - 0 + 2) \cdot 1 + (1^2 - 1 + 2) \cdot 1 + (2^2 - 2 + 2) \cdot 1) \cdot 1 \\ &\quad + \frac{1}{2} (0 - 0 + 2)(0-1) + (1^2 - 1 + 2)(1-1) + (2^2 - 2 + 2)(2-1) \cdot (x-1) \\ &= \frac{8}{3} \cdot 1 + (x-1) = \boxed{x + \frac{5}{3}} \end{aligned}$$

3b La distance d'un polynôme P au sous-espace F est la distance de P à sa projection P_F sur F .

$$R - R_F = x^2 - 2x + \frac{1}{3}, \quad \|R - R_F\|^2 = \langle x^2 - 2x + \frac{1}{3}, x^2 - 2x + \frac{1}{3} \rangle$$

$$\|R - R_F\|^2 = (0 - 2 \cdot 0 + \frac{1}{3})^2 + (1^2 - 2 \cdot 1 + \frac{1}{3})^2 + (2^2 - 2 \cdot 2 + \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$S - S_F = x^2 - x + 2 - (x + \frac{5}{3}) = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$$

On constate que $R - R_F = S - S_F$ et la distance est alors la même ce qui n'est pas étonnant car R et S diffèrent par un polynôme qui est dans F .

Exercice 2.

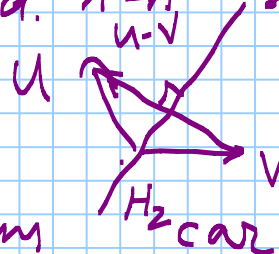
1. Montrer qu'un endomorphisme orthogonal et diagonalisable d'un espace euclidien est une symétrie orthogonale.
2. Nous travaillons dans \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne usuelle. Soient U, V deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n , de même norme ($\|U\| = \|V\|$). On considère l'hyperplan $H_n \subset \mathbb{R}^n$ orthogonal au vecteur $U - V$ et la réflexion $\sigma_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par rapport à H_n .
 - (a) Si $n = 2$ (donc dans \mathbb{R}^2), dessiner $U, V, U - V$ et finalement H_2 et trouver une base de H_2 .
 - (b) Écrire la matrice de σ_2 dans la base de \mathbb{R}^2 constituée de la base de H_2 complétée par $U - V$ (le dernier vecteur de cette base doit être $U - V$).
 - (c) Pour n quelconque, calculer $\sigma_n(U)$. Justifier brièvement.

1. Soit φ orthogonal alors dans toute base orthonormée A - la matrice de φ satisfait $A^{-1} = {}^t A$. Les valeurs propres réelles de φ orthogonal peuvent être que 1 et -1. Si en plus A est diagonalisable on a que 1 et -1 sur la diagonale et donc

$A = P D P^{-1}$ et comme $A^{-1} = P D^{-1} P^{-1}$ et avec 1 et -1 seules entrées possibles dans D on a $D = D^{-1}$ et $A = A^{-1}$ on conclut que $A = A^{-1} = {}^t A$ c.à.d. $A = A^T$ - symétrique!

2a) $\|U\| = \|V\|$ $H_2 \perp U - V$

une base de H_2 - on peut juste prendre $U + V$, c'est bien dans



car $\langle U+V, U-V \rangle = \langle U, U \rangle + \langle V, U \rangle - \langle U, V \rangle - \langle V, V \rangle = 0$
avec $\langle U, U \rangle = \langle V, V \rangle$ on a ce qu'il faut.

2b) La matrice de σ est évidente : ρ agit sur la base : $U + V \mapsto U + V$ et $U - V \mapsto -(U - V)$

cela donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2c) $\sigma(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ car $U + V \mapsto U + V$
 $U - V \mapsto -(U - V)$ indépendamment de dimension

donc $u = \frac{(U+V) + (U-V)}{2} \mapsto \frac{(U+V) - (U-V)}{2} = V$

Exercice 3.

Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme inversible dont la matrice dans la base canonique est

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Comment sait-on sans calculer les valeurs propres de T que T est diagonalisable? Citer le théorème du cours en question et écrire son énoncé.
2. Soit M_1 l'espace propre de valeur propre $\lambda_1 = -2$ de ϕ , engendré par le vecteur $v_1 = (1, a_1, b_1)$. Trouver les valeurs a_1, b_1 .
3. Soit M_2 l'espace propre de valeur propre $\lambda_2 = 1$ de ϕ , engendré par le vecteur $v_2 = (1, a_2, b_2)$. Trouver les valeurs a_2, b_2 .
4. Soit M_3 l'espace propre de valeur propre $\lambda_3 = 4$ de ϕ , engendré par le vecteur $v_3 = (1, a_3, b_3)$. Trouver les valeurs a_3, b_3 .
5. Dans la base canonique trouver les matrices E_1, E_2, E_3 des projections orthogonales sur les sous-espaces M_1, M_2, M_3 respectivement.
6. Calculer $E_1 + E_2 + E_3$ et expliquer le résultat.
7. Écrire T comme combinaison linéaire de E_1, E_2, E_3 , c'est-à-dire trouver les réels α, β, γ tels que $T = \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3$.
8. Trouver une matrice orthogonale P (c'est-à-dire satisfaisant $P^{-1} = {}^tP$) qui diagonalise la matrice T , donc telle que

$$T = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} {}^tP.$$

1 Par le thm. spectral toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

(Théorème spectral). Soit f un endomorphisme auto-adjoint. Alors f est diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit, il existe une base orthonormée qui consiste en des vecteurs propres de f .

ou bien

Théorème spectral pour les matrices — Soit A une matrice symétrique réelle alors il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale dont tous les coefficients sont réels, telles que la matrice A est égale à PDP⁻¹.

2. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ - calcul du système avec $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5 Projection sur un vecteur v est égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ à $P_v = (V V^T)^{-1} V^T V$. par ex: $v_1^T v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. On a

$$E_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, E_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi trouver ces matrices en écrivant les projecteurs de vecteurs de la base sur M_1, M_2, M_3 . Par exemple, e_1, e_2, e_3 sur M_1 . On calcule:

$$e_1 \mapsto \frac{\langle e_1, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \mapsto \frac{\langle e_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 \mapsto \frac{\langle e_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = -\frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } E_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

etc.

6. $E_1 + E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - Les matrices E_1, E_2, E_3 donnent

les projections sur 3 droites M_1, M_2, M_3 . Leur somme fait une décomposition d'un vecteur quelconque en combinaison linéaire de trois vecteurs $\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}$

Trois vecteurs linéairement indépendants de \mathbb{R}^3 forment une base de \mathbb{R}^3 , et donc la somme $E_1 + E_2 + E_3 = Id$.

7. On remarque que $TE_1 = -2 \cdot E_1, TE_2 = 1 \cdot E_2, TE_3 = 4E_3$ car les colonnes de E_i sont des vecteurs propres de valeur propre -2 etc.

Comme $E_1 + E_2 + E_3 = Id$, on a pour $\forall v \in \mathbb{R}^3$
 $Tv = T(E_1 + E_2 + E_3)(v) = (-2E_1 + 1 \cdot E_2 + 4E_3) \cdot v$

Donc $T = -2E_1 + 1E_2 + 4E_3$. En effet:

$$-2 \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Les colonnes dans la matrice orthogonal P forment une base orthonormée constituée de vecteurs propres de T :

$$v_1 \mapsto \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 \mapsto \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 \mapsto \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

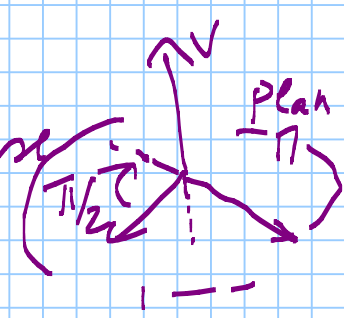
On considère l'espace \mathbb{R}^3 orienté par la base canonique. Soit ρ la rotation de \mathbb{R}^3 d'axe orienté et

dirigé par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d'angle $\pi/2$.

1. Ecrire la matrice de ρ dans une base orthonormée directe dont le dernier vecteur est $\frac{v}{\|v\|}$.
2. Comment trouver la matrice de ρ dans la base canonique? On ne demande pas la réponse numérique, il suffit d'expliquer en détail le procédé qui permet de trouver la matrice.

" Π " - lettre russe prononcée comme "P"

1. La matrice de ρ dans la base

$$A = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 & 0 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


2. La matrice A est écrite dans une base orthonormée faite d'une base directe orthonormée du plan $\Pi \perp v$ complétée par $\frac{v}{\|v\|}$. L'équation du plan $\Pi: x - 2y + 2z = 0$ c'est facile à trouver une b.o.n. dans ce plan en prenant deux vecteurs quelconques non colinéaires de Π et faire Gram-Schmidt. Par exemple, deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on calcul $f_1 = \frac{u}{\|u\|}$ et $f_2 = \frac{\tilde{f}_2}{\|\tilde{f}_2\|}$ où $\tilde{f}_2 = w - \langle w, f_1 \rangle f_1$. Pour passer à la matrice de ρ dans la base canonique il faut trouver la matrice de passage P de la base canonique vers $\{f_1, f_2\}$ une b.o.n. de Π complétée par $\frac{v}{\|v\|}$. La matrice P a pour colonnes $(f_1, f_2, \frac{v}{\|v\|})$. Puisque ses colonnes sont orthonormées on a $P^{-1} = P^T$ et matrice recherchée sera $\boxed{PA^T P}$.