Algèbre IV - CC2 - 2019-04-04

Exercice 1. (6 points)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ avec la base canonique (e_1, e_2, e_3) on considère l'endomorphisme $\phi : E \to E$ qui échange les vecteurs de base comme suit $e_1 \to e_2 \to e_3 \to e_1$.

1 1. Écrire la matrice de l'endomorphisme ϕ dans la base canonique. Notons la A.

1 2. Vérifier que A est une matrice orthogonale.

1 3. Trouver un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\phi(v) = v$. Le normaliser.

1 4. Est-ce que 1 est une valeur propre de A ? Est-ce que -1 est une valeur propre de A ?

1 5. Décrire la nature géométrique de A (rotation ou réflexion-rotation).

1 6. Trouver l'axe de la rotation et $\cos\theta$ où θ est l'angle de rotation.

1. $e_1 \mapsto e_2$, $e_2 \mapsto e_3$, $e_3 \mapsto e_1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. A est orthogonal car les vecteurs - colonnes forment une base orthonormale.

3. $\varphi(v) = v$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

C'est un multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} -x + z = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = y = z}$ Normalized: $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. On a vu dans le 3) que 1 est une valeur propre.

$\lambda = -1$? $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ — pas de soln. non-nul.

$\Rightarrow \lambda = -1$ n'est pas une valeur propre.

5. ~~dét $A = 1$ $\Rightarrow$ c'est une rotation.~~

6. $\det A = 1$ $\to$ c'est une rotation, l'axe de rotation est dirigé par

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$2\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\cos\theta = -\frac{1}{2}}$

Exercice 2. (9 points)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est la suivante

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le but de cet exercice est de donner la décomposition polaire de cette matrice. Pour cela

1 1. On considère le produit ${}^tTT$. Sans calculer que peut-on dire sur les valeurs propres et les espaces propres de ${}^tTT$?

1 2. Quels sont les valeurs propres de ${}^tTT$?

1 3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de ${}^tTT$. On désigne cette base par $\mathcal{B}$.

1 4. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Calculer l'inverse de P.

2 5. Diagonaliser ${}^tTT$.

1 6. Trouver S - la matrice symétrique définie positive, telle que $S^2 = {}^tTT$.

1 7. Quelle est la matrice R telle que $RS = T$?

1 8. Quelle est la nature de cette matrice R ?

1. ${}^tTT$ est symétrique défini positif. Par le thm. Spectral ${}^TTT$ est diagonalisable avec les valeurs propres positives et les espaces propres orthogonaux deux-à-deux.

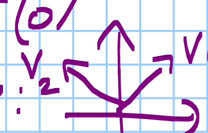
2. ${}^TTT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

~~diagonalization~~: valeurs propres $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 10 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 5\cdot 5 - 4\cdot 4 = 9 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}}$

3. Vecteurs propres :

$\lambda_1 = 9$ $({}^TTT - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5-9 & 4 \\ 4 & 5-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Géométrie :



$\lambda_2 = 1$ $\begin{pmatrix} 5-1 & 4 \\ 4 & 5-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = {}^tP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. ${}^TTT = P\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = {}^TP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $S^2 = {}^TTT$ et $S = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}{}^tP$

$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$

7. $RS = T \Rightarrow R = TS^{-1}$

$S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow R = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$

8. R est une reflexion car symétrique et orthogonal : $\det R = -1$

Ce qui n'est pas étonnant car le $\det T = -3 < 0$

Donc pour $S \in S^{++}$ il faut pour R une isométrie qui à le $\det R = -1$

Exercice 3. (5 points) (*)

Soit E un espace euclidien de dimension ≥ 2 et $\psi : E \to E$ un endomorpisme tel que pour $\forall x \in E$ on a $< \psi(x), x >= 0$. On considère deux sous-espaces de E :

1 • $\operatorname{Ker} \psi = \{x \in E | \ \psi(x) = 0\}$

2 • $\operatorname{Im} \psi = \{z \in E | \ \exists y \in E$ tel que $z = \psi(y)\}$

1. Rappeler le lien entre les dimesions de ces sous-espaces.

2. 2. Soit $x \in \operatorname{Ker} \psi$ et $y \in E$. Utiliser le produit scalaire $< \psi(x+y), (x+y) >$ pour montrer que $\operatorname{Ker} \psi$ est orthogonal à $\operatorname{Im} \psi$.

3. Conclure que $\operatorname{Ker} \psi = (\operatorname{Im} \psi)^{\perp}$.

1. $\dim \operatorname{Ker} \psi + \dim \operatorname{Im} \psi = \dim E$ (1) – thm. du rang

2. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{condition } (*)}}{0} = < \psi(x+y), x+y > = < \psi(x) + \psi(y), x+y >$

$= \underbrace{<\psi(x), x>}_{\substack{\uparrow (*) \\ 0}} + \underbrace{<\psi(x), y>}_{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ car } x \in \operatorname{Ker}\psi}} + <\psi(y), x> + \underbrace{<\psi(y), y>}_{\substack{\uparrow (*) \\ 0}}$

$\Rightarrow <\psi(y), x> = 0$, $\psi(y) \in \operatorname{Im}\psi$ et $x \in \operatorname{Ker}\psi$

Donc $\psi(y) \perp x$ et alors $\operatorname{Im}\psi \perp \operatorname{Ker}\psi$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\psi \subset (\operatorname{Im}\psi)^{\perp}$ (2)

3. On a $\operatorname{Im}\psi \oplus (\operatorname{Im}\psi)^{\perp} = E$ par définition

On a $\dim(\operatorname{Im}\psi)^{\perp} = \dim E - \dim(\operatorname{Im}\psi)$

et aussi par le (1) $\dim(\operatorname{Ker}\psi) = \dim E - \dim(\operatorname{Im}\psi)$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}\psi)^{\perp} = \dim \operatorname{Ker}\psi$ (3)

(2) + (3) $\Rightarrow \boxed{\operatorname{Ker}\psi = (\operatorname{Im}\psi)^{\perp}}$