2019 - Algèbre IV - CC1 - Corrigé

Exercice 1. Produit scalaire

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère la fonction f qui aux vecteurs $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, associe le réel $f(u,v) = (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3) + x_2y_2 + x_3y_3$.

2 1. Montrer que f munit $\mathbb{R}^3$ d'une structure euclidienne.

1 2. Quelle est, dans la base canonique, la matrice de produit scalaire donné par f ?

2 3. Former, par la méthode de Gram-Schmidt, une base orthonormée $\{q_1, q_2, q_3\}$ par rapport à f à partir de la base canonique $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

1 4. Quelle est la matrice Q, telle que $q_1 = Qe_1$, $q_2 = Qe_2$ et $q_3 = Qe_3$?

1 5. Quelle est la matrice de f dans la base $\{q_1, q_2, q_3\}$?

1.1. $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ structure euclidienne si

- bilinéaire
- symétrique
- définie positive

$\left.\begin{matrix}\text{bilinéaire} \\ \text{symétrique}\end{matrix}\right\} \Leftarrow \left\{\begin{matrix}\text{linéaire à droite} \\ \text{symétrique}\end{matrix}\right.$

symétrique - évident $f(u,v) = f(v,u)$

linéaire à droite $f(u, v+w) = (x_1+x_2+x_3)\big((y_1+z_1)+(y_2+z_2)+(y_3+z_3)\big)$

$w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ $\quad + x_2(y_2+z_2) + x_3(y_3+z_3)$

$= (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3) + x_2y_2 + x_3y_3$

$+ (x_1+x_2+x_3)(z_1+z_2+z_3) + x_2z_2 + x_3z_2 = f(u,v) + f(u,v)$

et $f(u, \lambda v) = (x_1+x_2+x_3, \lambda y_1 + \lambda y_2 + \lambda y_3) + x_2(\lambda y_2) + x_3(\lambda x_3)$

$= \lambda f(u,v)$

définie positive : somme de carré donc ≥ 0

si $f(u,u) = 0$ on a $(x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$ - définie !

1.2. La matrice est donnée par $f(e_i, e_j)$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.3. $q_1 = \frac{e_1}{\sqrt{f(e_1,e_2)}} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boxed{q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\tilde{q}_2 = e_2 - f(q_1, e_2)\, q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\sqrt{f(\tilde{q}_2, \tilde{q}_2)}}$

$f(\tilde{q}_2, \tilde{q}_2) = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (-1+1+0)(-1+1+0) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$

$\boxed{q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

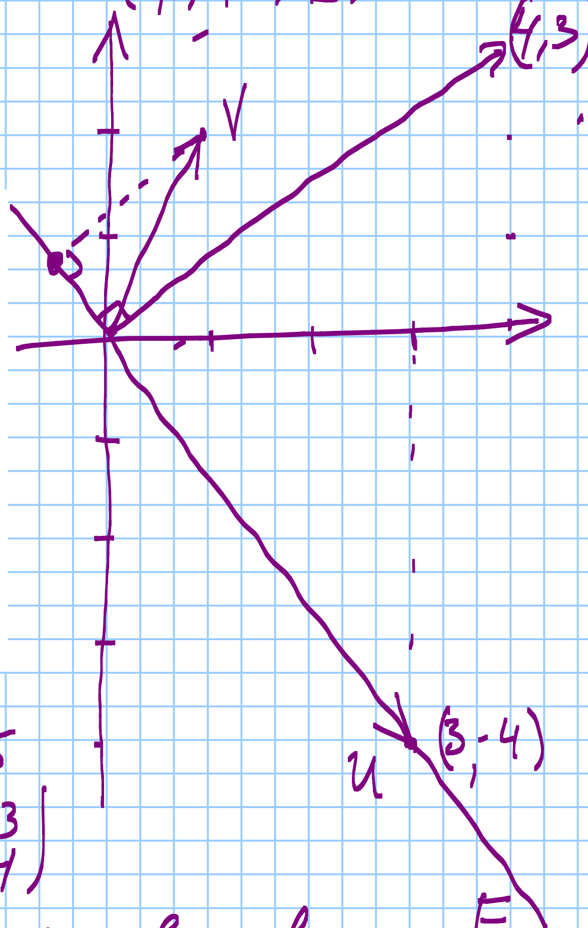
$$\hat{q}_3 = e_3 - f(q_1,e_3)q_1 - f(q_2,e_3)q_2$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \left((1+0+0)\cdot(0+0+1)+0\cdot 0+0\cdot 1\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \underbrace{\left((-1+1+0)(0+0+1)+1\cdot 0+0\right)}_{=0}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad f(q_3,q_3)=1 \Rightarrow \boxed{q_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$$

1.4. $\boxed{Q = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$

1.5 La matrice de f dans la base (q_1,q_2,q_3) est $\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$



Exercice 2. Sous-espaces orthogonaux (8 points)

Soit $E = \mathbb{R}^2$ - l'espace euclidien avec la base canonique (e_1, e_2). On munit E du produit scalaire standard (donné par $< X, Y >= {}^tX \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2$ où (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont les coordonnées des vecteurs X et Y respectivement.)

On considère deux vecteurs U, V de coordonnées respectives $(3, -4)$ et $(1, 2)$.

1 1. Soit F le sous-espace engendré par le vecteur U. Trouver une base orthonormée de E dont le premier vecteur est colinéaire à U.

1 2. Quelle est la projection orthogonale du vecteur V sur l'espace F ?

1 3. Quelle est la distance du point $(1, 2)$ au sous-espace F ?

2 4. Calculer $p_F : E \to E$, la projection orthogonale sur F des vecteurs de la base canonique. Quelle est la matrice de p_F dans la base canonique ?

1 5. Expliciter la même matrice par la formule de la methode des moindres carrés.

1 6. Quels sont le noyau et l'image de p_F ?

1 7. Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de p_F est $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale.

2.1. Orthonormée : $\left\|\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$

$\Rightarrow$ U normalisé : $f_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

Il est facile de trouver f_2 t.q. $f_2 \perp f_1$ et $\|f_2\| = 1$. On prend $f_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

2.2. La projection de V sur F : $p_F(V) = \langle f_1, V\rangle f_1$

$$= \frac{1}{5}(3,-4)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}$$

2.3. distance : $\|V - p_F(V)\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}\right\|$

$$= \left\|\begin{pmatrix}8/5\\6/5\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{8^2+6^2} = \frac{2}{5}\cdot 5 = \boxed{2}$$

2.4. Projection de $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sur f_1 :

$$p_F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \left(3/5, -4/5\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3/5\\-4/5\end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}3/5\\-4/5\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}9\\-12\end{pmatrix}$$

$$p_F\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \left(3/5, -4/5\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/5\\-4/5\end{pmatrix} = -\frac{4}{5}\begin{pmatrix}3/5\\-4/5\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-12\\16\end{pmatrix}$$

La matrice de p_F est $\frac{1}{25}\begin{pmatrix}9 & -12\\-12 & 16\end{pmatrix}$

2.5. La même matrice : $\frac{f_1\,{}^tf_1}{{}^tf_1\cdot f_1} = \frac{1}{(3,-4)\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}(3,-4)$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}9 & -12\\-12 & 16\end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & -12\\-12 & 16\end{pmatrix}$$

2.6. $\operatorname{Im} p_F = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right\}$ et $\operatorname{Ker} p_F = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right\}$

2.7. Telle base doit avoir un vecteur dans $\operatorname{Im} p_F = F$ et l'autre dans $\operatorname{Ker} p_F = F^\perp$, comme $F \perp F^\perp$ c'est une base orthogonale.

Exercice 3. Cauchy-Schwarz

1. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ avec la base canonique et le produit scalaire standard. Soient deux vecteurs v_1 et v_2 à coordonées (a,b,c) et (d,e,f) respectivement.

1 (a) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas là en termes des coordonnées de vecteurs v_1 et v_2.

2 (b) Soit x, y, z trois réels tels que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 1$. Montrer que nous avons

$$(x+y+z)^2 \le \frac{11}{6}.$$

Indication. On peut voir $x+y+z$ comme un produit scalaire d'un vecteur à coordonnées numeriques avec un vecteur dependant de (x,y,z).

Par exemple, $x+y+z = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle$.

Il faudra choisir une representation judicieuse de ce type et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Soient A et B deux matrices réelles symétriques $n \times n$, (${}^tA = A$ et ${}^tB = B$). En utilisant le produit scalaire $(A, B) = \operatorname{tr}(A \cdot {}^tB)$ montrer que

2
$$(\operatorname{tr}(AB + BA))^2 \le 4\operatorname{tr}(A^2)\cdot\operatorname{tr}(B^2)$$

3.1 (a)

$$(ad + be + cf)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2)$$

3.1 (b)

$$x + y + z = 1\cdot x + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}z)$$

En utilisant 3.1(a)

$$\left(1\cdot x + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}z)\right)^2 \le \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)\left(x^2 + (\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right) \le \frac{11}{6}\cdot 1$$

3.2. On utilise les propriétés de trace :

$\mathrm{tr}\, XY = \mathrm{tr}\, YX$ (1) et $\mathrm{tr}(X+Y) = \mathrm{tr}\, X + \mathrm{tr}\, Y$ (2)

$\mathrm{tr}(AB+BA) \overset{(2)}{=} \mathrm{tr}\, AB + \mathrm{tr}\, BA \overset{(1)}{=} 2\, \mathrm{tr}\, AB$

et comme $A = {}^{T}\!A$ et $B = {}^{T}\!B$ on a $\mathrm{tr}\, AB = \langle A, B \rangle$

et $\mathrm{tr}\, A^2 = \langle A, A \rangle$ et $\mathrm{tr}(B^2) = \langle B, B \rangle$

Donc $2\, \mathrm{tr}\, AB = 2 \langle A, B \rangle$

et en utilisant l'inégalité Cauchy-Schwarz

$$(\langle A, B \rangle)^2 \leq \langle A, A \rangle \cdot \langle B, B \rangle$$

On a

$$(\mathrm{tr}(AB+BA))^2 = 4(\mathrm{tr}\, AB)^2 \leq 4\, \mathrm{tr}\, A^2 \cdot \mathrm{tr}\, B^2$$