Algèbre IV – Chapitre 9
Décomposition de Fourier

9.1. Famille orthogonale de fonctions

On considère l'espace des fonctions

$D_{\mathbb{C}}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques, continue par morceau :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0^+} f(t+h) + \lim_{h\to 0^-} f(t+h)\right)$

$\exists$ subdivision $0 \le a_0 \le \dots \le a_r \le 2\pi$

t.q. $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ continue et $\begin{cases} \lim_{a_i^+} f \text{ existe} \\ \lim_{a_i^-} f \text{ existe} \end{cases}$

$D_{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \in D_{\mathbb{C}} \}$ – $\mathbb{R}$ esp. vect.

On dit que f est une combinaison linéaire de ~~les~~ fonctions $f_1, \dots f_n$ si $\exists \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.q.

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$$

En analyse on considère les combinaisons linéaires infinie — les séries

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$$

Pour définir la somme d'une serie il faut pouvoir mesurer la différence $f - S_n$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k$

Pour juger si $f - S_n$ tend vers 0 il faut savoir mesurer les distances

On introduit un produit scalaire, puis une norme !

Pour le produit scalaire : on considère

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (f\bar{g})(x)\,dx \quad \text{si } f,g \text{ - fonctions complexes}$$

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (f\cdot g)(x)\,dx \quad \text{réelles}$$

Déf 1 On dit que une famille de vecteurs $\{e_i, i\in\mathbb{N}\}$ est orthonormée si $\forall i,j$

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$$

Déf 2 a) Une famille finie vect. $x_1 \dots x_n$ est linéairement indépendante, si $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ est possible ssi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

b) Une famille (en partic. infinie) est dit linéairement indep. si $\forall$ sous-famille est linéairement indep-te.

On s'intéresse aux familles orthog. de fonctions continues par morceau sur I. de composition de Fourier.

Famille $\{e^{imt}, m\in\mathbb{Z}\}$

Exemple : $\langle e^{imt}, e^{int}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt}\cdot e^{-int}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}\,dt$

$$= \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 2\pi & \text{si } m=n \\ \frac{1}{i(m-n)}\left[e^{i(m-n)x}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i(m-n)}\underbrace{\left(e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}\right)}_{=0} \end{cases}$$

car $e^{ik\pi} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ pair} \\ -1 & \text{si } k \text{ impair}\end{cases}$

$m \geq 0,\ n \geq 0$ famille $\{\cos mx;\ \sin nx\}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2} \cdot \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\, dx$$

$$= \int \frac{e^{imx} \cdot e^{inx} + e^{imx} \cdot e^{-inx} + e^{-imx} e^{inx} + e^{-imx} e^{-inx}}{4}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \ \forall\, m, n.$$

$$\int \sin mx \ \sin nx\, dx = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Proposition</u> La famille trigonométrique $\{1, \cos nx, \sin nx;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ forme une famille orthogonale de $R_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

Orthonormée :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}};\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

<u>Remarque</u> : Si à la place $[-\pi, \pi]$ on a un intervale $[-\ell, \ell] \subset \mathbb{R}$

la famille orthonormée de fonctions

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\ell}},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos \frac{\pi}{\ell} nx,\ \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin \frac{\pi}{\ell} nx;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

9.2. Coeffts de Fourier.

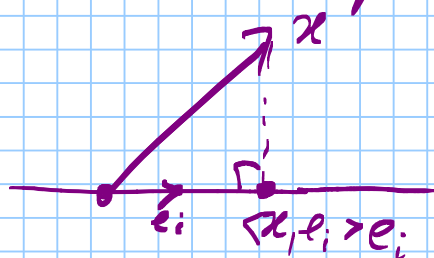
Soit E un esp. vect. avec une base orthonormée $\{e_i\}$

Tout vect. $x \in E$ se décompose en somme : $x = \sum x^i e_i$ où x^i sont des coeff. de décomposit.

$x^i = \langle x, e_i \rangle$

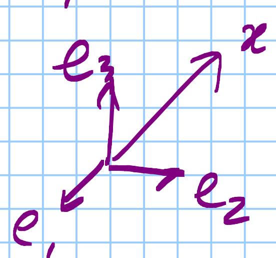
Déf On appelle $\langle x, e_i \rangle$ les coeffts de Fourier de x.

Geométriquement. C'est une projection de x sur e_i



$\underbrace{\langle x, e_i \rangle}_{x_i} e_i$

Remarque



Si on a un espace E avec une base orthonormée $\{e_1, e_2, e_3\}$ et on considère, par exemple que la décomposition de x en e_1 et e_2 — ce n'est pas possible mais les coeffts de Fourier $\langle x, e_1 \rangle$ et $\langle x, e_2 \rangle$ donne la projection de x sur le plan $\{e_1, e_2\}$ — le vecteur

$\langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2$ est le plus proche de x parmi tous les vecteurs du plan engendré par $\{e_1, e_2\}$

Défn: Soit E, $\langle \cdot,\cdot\rangle$ et $\ell_1 \dots \ell_k \dots$ une famille orthogonale de E alors à tout vecteur $x \in E$ correspond une série $x \sim \sum_{k=1} \frac{\langle x, \ell_k\rangle}{\langle \ell_k, \ell_k\rangle} \ell_k$ - c'est une série de Fourier de la famille orth. $\{\ell_k\}$

Si $\{e_k\}$ est orthonormée, on correspond une série

$$x \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$$

c'est une série de Fourier de x pour la famille orthonormée $\{e_k\}$. Si la famille est finie c'est juste une somme.

Exemple Soit E - l'espace de fns réelles intégrable $\mathcal{R}([-\pi,\pi], \mathbb{R})$ avec le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f g(x)\,dx$

on considère la famille orthogonale $\{1, \cos kx, \sin kx, k \in \mathbb{N}^*\}$

$$f \longmapsto \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Par exemple $f(x) = x$

$a_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$

$b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$$

9.3. Propriétés de décomposition de Fourier. Parseval

Lemme de perpendiculaire

Soit $\{e_k\}$ - une famille finie ou denombrable de vecteurs orthogonaux de E et soit la serie de Fourier de la famille $\{e_k\}$ converge vers $x_e \in X$

Alors $x = x_e + h$ où h est orthogonal à l'espace vect. engendré par $\{e_k\}$

Preuve : m.q. $\langle h, e_m \rangle = 0 \quad e_m \in \{e_k\}$

$$h = x - x_e = x - \sum_k \frac{\langle x, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} e_k$$

$$\langle h, e_m \rangle = \langle x, e_m \rangle - \sum \frac{\langle x, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} \underbrace{\langle e_k, e_m \rangle}_{\neq 0 \text{ si } k=m}$$

$$= \langle x, e_m \rangle - \frac{\langle x, e_m \rangle}{\langle e_m, e_m \rangle} \langle e_m, e_m \rangle = 0$$

Inégalité de Bessel

$x = x_e + h$ Pythagore :

$\|x\|^2 = \|x_e\|^2 + \|h\|^2 \geq \|x_e\|$ en coeff. de Fourier :

Pour le syst. orthonormé $\{e_k\}$

$$\|x_e\|^2 = \langle \sum \langle x, e_k\rangle e_k, \sum \langle x, e_k\rangle e_k \rangle$$

$$= \sum |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Le système « ~~trigo~~ » :

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\, dx$$

$$\sum_k x^k e_k = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k$$

A cause de cette inégalité de Bessel la série $\sum_k |x^k|^2$ converge

$\Rightarrow$ Pythagore :

$$\|x^m e_m + \ldots + x^n e_n\|^2 = |x^m|^2 + \ldots + |x^n|^2$$

Critère de Cauchy pour conv. de $\sum x_k^2$ $\Rightarrow |x^m|^2 + \ldots + |x^n|^2$ devient plus petit que n'importe quel $\varepsilon > 0$ choisi pour m, n suffisamment grand

$$\Rightarrow |x^m e_m + \ldots + x^n e_n| < \sqrt{\varepsilon}$$

$\Longrightarrow$ $\sum x^k e_k$ satisfait le critère de Cauchy et alors la série de

Fourier converge. (E complet par rap. à la métrique induit par la norme $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$).

<u>Defn</u> la famille $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ de vecteurs de l'esp. vect E est dite complete par rapport à l'ensemble $X \subset E$, si pour ~~tout~~ vecteur $x \in X$ on peut trouver une combinaison linaire fini de x_α si proche qu'on veut.

autrement dit X est contenue dans la fermeture de l'espace engendré par $\{x_\alpha\}$

<u>Exemple</u> 1. $E = \mathbb{R}^3$ $\{e_1, e_2, e_3\}$ - base

$\{e_1, e_2, e_3\}$ est complète dans E mais $\{e_1, e_2\}$ ne l'est pas. $\{e_1, e_2\}$ est complète par rapport à n'imp. quel sousens de l'esp. engendré par $\{e_1, e_2\}$.

2. On considère $\{1, \cos kx, \sin kx, k \in \mathbb{N}^*\}$

Si on enleve par exemple 1, la famille n'est pas complète dans l'espace des fn. intégrables $R_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Si on essaye de presenter $f(x) = 1$ par une combinaison linéaire $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

sont des coef. a_n, b_n de Fourier de fn. 9
1. par rapport à la famille orthogonale $\{\cos kx, \sin kx, k \in \mathbb{N}^*\}$. Par les relations d'orthogonalité $T \equiv 0$
alors $\|1 - T_n\| \geq \|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx} = \sqrt{2\pi} > 0$
On ne peut pas approcher 1 par les comb. linéaires de $\{\cos kx, \sin kx\}$ pour plus que $\sqrt{2\pi}$.

__Thm__. (condition de complétude de système)
Soit E - un esp. vect. euclidien et $e_1, \dots e_n \dots$ une famille finie ou dénombr. de vect. ortogonaux deux-à-deux de E. Alors on a des conditions équiv.

a) la famille est complète par rapport à un sens $X \subset E$

b) $\forall$ vect. $x \in X$ il existe une de comp. de Fourier :

$$x = \sum_k \frac{\langle x, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle} e_k$$

c) Egalité de Parseval (1755-1836 trouvé en 1799):

$$\|x\|^2 = \sum_k \frac{|\langle x_k, e_k\rangle|^2}{\langle e_k, e_k\rangle}$$

Si $\{e_1, \dots, e_k, \dots\}$ est une famille orthonormée alors $x = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k$ et

$$\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2$$

Parseval = Pythagore pour les coeffts de Fourier.

a => b   propriété de coef. Fourier

b => c   Pythagore

c => a   lemme de perpendiculaire :

Pythagore : $\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \|^2$

$= \|x\|^2 - \| \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \|^2 = \|x_k\| - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$

Remarque Parseval => pas de vecteur non nul orthogonal à $X \subset E$

Parseval :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 (x)\, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right).$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1} 2}{k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}, \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$