Chapitre 8 - Géométrie affine

(basé sur le cours de Marie Carrizosa pour le parcours PRÉPAS).

8.1. Définition d'un espace affine

La géométrie affine manipule les notions "élémentaires" – points, droites, plans, distances, angles, parallélisme, orthogonalité...

Deux façons de procéder:

- axiomatique (Euclide, Hilbert)
- moderne en utilisant l'alg. linéaire mais pas trop intuitive: on utilise les vecteurs pour définir les points et pas l'inverse

Quelques exemples:

1) exemple typique: si E esp. vect. F - ss esp. vect. de E et $\vec{v} \in E$

$$\mathcal{F} = v + F = \{v + f, f \in F\}$$ - translaté d'un esp. vectoriel

2) Plus concrètement:

dans $\mathbb{R}^2$ droite: $2x - 5z = 0$ définie un sous-esp. vect. de $\mathbb{R}^2$

mais droite: $2x - 5z + 8 = 0$ définie un espace affine.

dans $\mathbb{R}^3$ droite D: $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 6t+2 \\ z = -t+3 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Plan $\mathcal{P}$: $ax + bx + cz + d = 0$

- On remarque si $E = \mathbb{R}^3$ et un ssesp. vect.

$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ 2x + y - z = 0 \right\}$ et

$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ 2x + y - z + 3 = 0 \right\}$ on peut

écrire $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + F$ mais aussi $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + F$.

- On remarque aussi que si on considère deux "pts" de $\mathcal{F}$

(x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) alors

$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \in F$

Donc à un couple de pts de $\mathcal{F}$ on associe un vecteur de F.

<u>**Déf**</u> Soit E un espace vectoriel réel (ou complexe). On appelle espace affine sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) d'espace directeur E (ou de direction E) un ensemble non-vide $\mathcal{E}$ muni d'une application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$ notée : $(x, y) \longmapsto \overrightarrow{xy}$ satisfaisant les conditions suivantes :

1) $\forall\, x, y, z \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$
(Relation de Chasles)

2) Pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\vec{u} \in E$, il existe un unique point $y \in \mathcal{E}$ t.q. $\overrightarrow{xy} = \vec{u}$.

Remarques

(i) les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés les points de $\mathcal{E}$

(ii) Il est courant d'utiliser la notation $x+\vec{u}$ pour se référer au pt y tel que $\vec{xy} = \vec{u}$

(iii) l'application $E \longrightarrow \mathcal{E}$ (pour x fixé)
$u \longmapsto x+u$

est une bijection qui envoie $\vec{0}$ sur x

Exemples 1) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x-5y+8=0\}$

le ssesp. vectoriel est $D = \{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / 2x-5y=0\}$

et l'application: $\mathcal{D}\times\mathcal{D} \longrightarrow D$
$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longmapsto \begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ vérifie bien les deux propriétés

et $D \longrightarrow \mathcal{D}$

par $\mathcal{D} = \{(4,0)+\vec{u},\ \vec{u}\in D\}$ avec la notation de (ii)

on écrit $\mathcal{D} = (4,0)+D$

2) $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \exists t \in \mathbb{R}$ t.q $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 6t+2 \\ z = -t\cdot 3 \end{cases}\}$

on pose $D = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \exists t\in\mathbb{R}$ t.q. $\begin{cases} x=2t\\ y=6t\\ z=-t\end{cases}\} = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix}2\\6\\-1\end{pmatrix}\}$

ssev. de $\mathbb{R}^3$

et comme avant $\mathcal{D}\times\mathcal{D} \longrightarrow D$
$((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \mapsto \begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$ vérifie les propr.

Ici: $\mathcal{D} = (1,2,3)+D.$

3) Dans $\mathbb{R}^n$ le singleton $\mathcal{E} = \{(x_1, \ldots x_n)\}$ est un espace affine dirigé par l'espace vect. $\{\vec{0}\}$ grâce à
$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\to \{\vec{0}\} \\ (\underline{x}, \underline{x}) &\mapsto \underline{x} - \underline{x} \end{aligned}$$

8.2. Premières propriétés

Soit $\mathcal{E}$ - espace affine dirigé par E

i) $\forall x \in \mathcal{E} \quad \vec{xx} = \vec{0}$

ii) $\forall x, y \in \mathcal{E} \quad \vec{xy} = -\vec{yx}$

iii) Soient $x, y \in \mathcal{E}$. Pour un point $z \in \mathcal{E}$ on a l'équivalence $\vec{xz} = \vec{zy} \iff 2\vec{xz} = \vec{xy}$

Pour tout $x, y \in \mathcal{E}$ un tel point z existe et est unique

On l'appelle le milieu de $[xy]$

iv) Soient $x, y, x', y' \in \mathcal{E}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\vec{xy} = \vec{x'y'}$

b) $\vec{xx'} = \vec{yy'}$

c) les milieux de $[xy']$ et $[x'y]$ coincident

Si l'une de ces propriétés est vérifiée et si les vecteurs $\vec{xy}$ et $\vec{xx'}$ sont indépendants on dit que $xyx'y'$ est un parallélogramme

<u>Preuve</u> : i) $\vec{xx} = \vec{xx} + \vec{xx} = 2\vec{xx} \Rightarrow \vec{xx} = 0$

ii) $\vec{0} = \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yx} \Rightarrow \overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$
(Chasles).

iii) $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{zy} \iff \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{zx} + \overrightarrow{xy}$

$\iff 2\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy}$

Soit $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{xy}$ alors $\exists !\, z$ t.q. $\overrightarrow{xz} = \vec{u}$ (défin esp. affine)

Donc $2\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy}$

iv) $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'} \iff \overrightarrow{xx'} + \overrightarrow{x'y'} + \overrightarrow{y'y} = \overrightarrow{x'y'}$

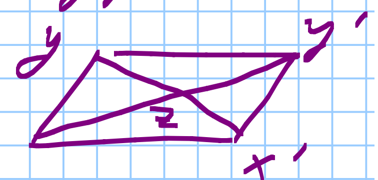
(a⇔b) $\iff \overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'}$

(b⇒c) Soit z le milieu de [xy'] m.q. c'est aussi le milieu de [x'y]

Donc $2\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy'}$

$\iff 2\overrightarrow{xx'} + 2\overrightarrow{x'z} = \overrightarrow{xx'} + \overrightarrow{x'y} + \overrightarrow{yy'}$

$\iff \overrightarrow{xx'} - \overrightarrow{yy'} + 2\overrightarrow{x'z} = \overrightarrow{x'y}$



Si b vraie ($\overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'}$) alors.

$2\overrightarrow{x'z} = \overrightarrow{x'y}$ et donc z milieu de [x'y]

(c⇒b): Si c est vrai on a

$\overrightarrow{xx'} - \overrightarrow{yy'} = \overrightarrow{xz} + \overrightarrow{zx'} - (\overrightarrow{yz} + \overrightarrow{zy'})$

mais $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{zy'}$ et $\overrightarrow{zx'} = \overrightarrow{yz}$

alors $\overrightarrow{xx'} - \overrightarrow{yy'} = 0$ (b)

La dimension d'un espace affine est la dimension de son espace directeur.

8.3. Sous-espaces affines.

Ex $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{F} = A + F$ où $A \in \mathcal{F}$ et F - sous-esp. vectoriel de $\mathbb{R}^3$

On peut retrouver F à partir de $\mathcal{F}$:

$\{\overrightarrow{AB},\ B \in \mathcal{F}\} = F$.

$\mathcal{F}$ est un espace affine mais aussi un "sous-espace" de $\mathbb{R}^3$.

Déf : Soit $\mathcal{E}$ esp. affine de direction E un ss-ensemble non-vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est appelé un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ s'il existe un point $A \in \mathcal{F}$ tel que $\{\overrightarrow{AB},\ B \in \mathcal{F}\}$ soit un sous-espace vectoriel de E

On dit alors que $\mathcal{F}$ est un ss esp aff. passant par A dirigé par $F = \{\overrightarrow{AB},\ B \in \mathcal{F}\}$

Par déf. on a bien $\mathcal{F} = A + F := \{A + \vec{v},\ \vec{v} \in F\}$

Rq. Pour tout point $A' \in \mathcal{F}$ un sous-esp. affine passant par A dirigé par F on a $\{\overrightarrow{A'B},\ B \in \mathcal{F}\} = F$. En effet F contient le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et donc

$\vec{A'B} = \vec{A'A} + \vec{AB} \in F$ d'où

$\{\vec{A'B},\ B \in \mathcal{F}\} \subseteq F$

Pour l'autre inclusion $\{\vec{A'B},\ B \in \mathcal{F}\} \supseteq F$:

Soit $\vec{AB} \in F$ $(B \in \mathcal{F})$. Il existe $C \in \mathcal{E}$

t.q. $\vec{A'C} = \vec{AB}$. Il faut voir que

$C \in \mathcal{F}$ et donc $\vec{AC} \in F$.

mais $\vec{AC} = \vec{AA'} + \vec{A'C} = \vec{AA'} + \vec{AB} \in F$

car esp. vect.

Rq. Un sous-esp. affine est lui-même un espace affine.

Ex. Quels sont ssesp. affines de dim 0?

Def Une droite affine est un ssesp affine de dim 1

un plan affine — " — 2

Comment m.q. un ss ens. $V \subset \mathcal{E}$ est un ssesp affine ? — Il faut trouver $A \in V$ et m.q. $\{\vec{AB},\ B \in V\}$ est un ss-esp. vectoriel.

Il y a encore des notions qu'on n'a pas discuté :

- Intersection des sous-esp. affines
- ssesp. affine engendré,
- parallélisme

8.4. Espaces affines euclidiens – $\mathcal{E}$ dirigé par E. $\mathcal{E}$ euclidien si E l'est.
(on peut définir la distance
$d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$)

- orthogonalité.
- repères
- projection orthogonale.
- eqn. normale d'un hyperplan.