Chapitre 6. Endomorphismes orthogonaux

Définitions

6.1. Un endomorphisme $u : E \to F$ est dit orthogonal s'il conserve la norme c.à.d. si pour $\forall x \in E$ on a

$$\| u(x) \| = \|x\|$$

On dit que c'est une isométrie vectorielle.

En. Propriété :

(1) Pour qu'une applic. $f : E \to F$ soit une isom. il faut et il suffit que f conserve le produit scalaire

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

(2) Une isométrie est un isomorphisme

(3) La composée de deux isométries et d'une isométrie sont des isométries

(4) Une isométrie $f : E \to F$ transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale de F.

Réciproquement, étant donné une applic. linéaire où $\dim E = \dim F$ s'il existe une base orthonormale de E tranformée par f en une base orthonormale de F, alors f est une isométrie.

6.2. Matrices orthogonales

Déf Une matrice carré est dite orthogonale si ${}^{T}\!AA = I$ (I : matrice identité)

Propriété caractéristiques

Pour une matrice carrée A, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) A est orthogonal

(2) A est la matrice d'un endomorphisme orthogonal $u : E \to E$ dans une base orthonormale

(3) A est la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale

(4) Les colonnes de A sont orthonormales.

Conditions necessaires

(a) Si A est orthogonale $\det A = \pm 1$

(b) Une matrice orthogonale A est inversible et $A^{-1} = {}^{T}\!A$

(c) L'inverse d'une matrice orthogonale, le produit de deux matrices orthogonales — sont des matrices orthogonales.

O_n - l'ensemble des matrices orthogonales
c'est un sous-groupe du groupe multiplicati des matrices inversibles de $Mat_n(\mathbb{R})$

O_n est appelé le <u>groupe orthogonal</u> d'ordre n.

<u>6.3</u> <u>Groupe des rotations</u>

<u>Déf</u> Une rotation est un endomorphisme orthogonal de déterminant égal à <u>1</u>.
L'ensemble des rotations de E est noté $SO_n(E)$. Le produit de deux rotations est une rotation, l'inverse d'une rotation est une rotation.
C'est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

<u>Orientation</u> de E.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
La matrice de passage de B à $\mathcal{B}$ étant inversible et de dét non nul donc strictement > 0 ou strictement < 0.

On peut donc partager les bases de E en deux classes

A partir d'une base B choisie arbitrairement, toutes les B' t.q. la matrices de passage de B à B' soit de dét > 0 sont dans la première classe et dét < 0 dans le seconde.

Orienter E c'est convenir que les bases de l'une des classes seront appelées directes, les autres étant appelées indirectes.

autrement dit : orientation d'un espace euclidien E c'est un choix d'une base particulière.

Groupe $SO_2(\mathbb{R})$

Supposons E orienté, rapporté à une base B.

- Les matrices de SO_2 sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$
$0 \leq \theta < 2\pi$.

θ - l'angle de rotation.

La trace de A donne la valeur de $\cos\theta$: $= \frac{1}{2} tr\, A - \frac{1}{2}$.

Son inverse : rotation par $(-\theta)$

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

<u>Proposition</u>: La multiplication par une matrice orthogonale Q

i) preserve la norme $\forall x \in \mathbb{R}^n$

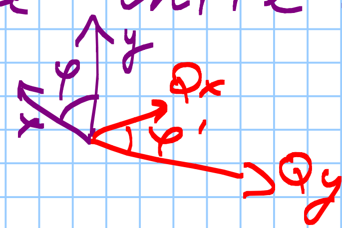
$$\|Q(x)\| = \|x\|$$

ii) preserve le produit scalaire:

$$\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle \quad ({}^T(Qx)Qy = {}^Txy)$$

(iii) preserve l'angle entre x et y

car



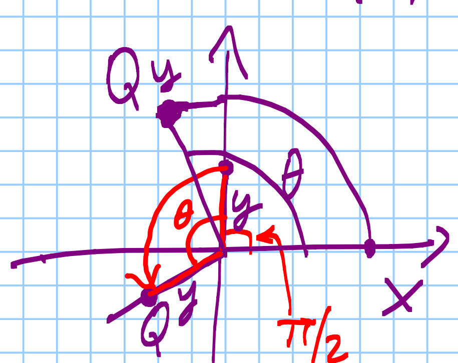
$$\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\varphi$$

et $\langle Qx, Qy\rangle = \|Qx\| \cdot \|Qy\| \cdot \cos\varphi'$

$$\cos\varphi' = \frac{\langle Qx, Qy\rangle}{\|Qx\|\|Qy\|} = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} = \cos\varphi$$

En dim 2 : $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$



$$\longmapsto x\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\cos(\theta+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}$$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta.$$

$$\sin(\theta+\pi/2) = \cos\theta$$

6.4 Etude de $O(3,\mathbb{R})$.

Prop Soit $A \in O(3,\mathbb{R})$ et u l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ t.q. A - la matrice de u dans une base canonique $\{e_i\}$. Il existe alors une base orthonormée $\{f_1, f_2, f_3\}$ t.q.

$$A' = M(u)_{f'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$\varepsilon = +1$ si $\det A = 1$ $\quad (A \in SO(3,\mathbb{R}))$

ou $\varepsilon = -1$ si $\det A = -1$ $\quad (A \notin SO(3,\mathbb{R}))$

Démo : Si $A = \pm I$ trivial $f_i = e_i$ et $\theta = 0$ si $A = I$, $\theta = \pi$ si $A = -I$

supposons que $A \neq \pm I$

Rappel - Lemme 0 : Toute valeur propre de A est de module 1. (A est une matrice orthogonale de l'endomorfisme u qui preserve le produit scalaire : $\langle Ux, Ux\rangle = \langle x, x\rangle$)

Démo : Soit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ t.q. $Ux = \lambda x$

$\langle Ux, Ux\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\bar{\lambda} \langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda} = 1$

Lemme 1 - Si $\det A = 1$, $\lambda = 1$ est valeur propre d'ordre 1 ou 3

- Si $\det A = -1$, $\lambda = -1$ est valeur propre d'ordre 1 ou 3

En effet supposons $\det A = 1$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont réelles $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det A = 1$ et

$\lambda_i = \pm 1 \Rightarrow$ soit $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$

soit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

Si une des valeurs propres est complexe μ $\bar{\mu}$ est aussi une valeur propre car A est réelle

Ainsi $\det A = \lambda \mu \bar{\mu}$ où λ est l'autre valeur propre forcement réel $\lambda \underbrace{\mu\bar{\mu}}_{|\mu|^2>0} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$

Similaire pour $\det A = -1$

Lemme 2 Si le $\det A = 1$ alors $\dim E_1 = 1$
Si $\det A = -1$ alors $\dim E_{-1} = 1$

En effet supposons $\det A = 1$ ($\lambda = 1$ valeur propre simple ou triple)

Si $\dim E_1 = 3$ on a $E_1 = \mathbb{R}^3$ donc $A = I$

Supposons par l'absurde que $\dim E_1 = 2$ ($\lambda = 1$ est alors valeur propre triple). Soit $\{v_1, v_2\}$ une base de E_1 et $w \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}^\perp$

$$\langle u(w), v_i \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } u(v_i) = v_i}}{=} \langle u(w), u(v_i) \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } u\text{-orthog.}}}{=} \langle w, v_i \rangle = 0$$

$\Rightarrow U(w) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}^\perp = \mathrm{Vect}\{w\}$

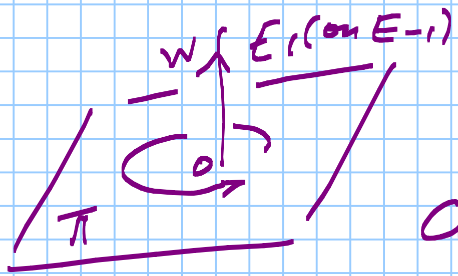
$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $U(w) = \lambda_0 w$

mais $\lambda_0 = 1$ et $u(w) = w \Rightarrow w \in E_1$ mais on a dit que $w \perp E_1$ Contradiction. Donc $\dim E_1 = 1$

Le cas $\det A = -1$ se traite de manière analogue

Lemme 3 Si $\det A = +1$ (resp. $\det A = -1$) alors le plan $\pi = E_1^\perp$ (resp. $\pi = E_1^\perp$) est invariant par U est la restriction de U sur π est une rotation

Soit $w \in E_1$ - vect. propre de U : $U(w) = w$



Soit $x \in \pi$

c.à.d. $\langle x, w \rangle = 0$

Comme U est orthogonale :

$\langle U(x), U(w) \rangle = 0$ mais $U(w) = \pm w$

alors $\langle U(x), U(w) \rangle = \langle U(x), w \rangle = 0$

$\Rightarrow U(x) \in E_1^{\perp} = \pi \Rightarrow \pi$ est stable par U.

Soit $\tilde{U} = U|_{\pi}$ - restriction

$\forall\, x, y \in \pi$ on a : $\langle \tilde{U}(x), \tilde{U}(y) \rangle_{\pi} = \langle U(x), U(y) \rangle_E$

$= \langle x, y \rangle_E = \langle x, y \rangle_{\pi} \Rightarrow \tilde{U}$ est orthogonale

M.q. det $\tilde{U} = 1$.

Si $\{v_1, v_2\}$ une base de π on a

$A'_{\{v_1, v_2, w\}} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - matrice de U dans la base $\{v_1, v_2\}$

Et $\varepsilon = \pm 1$ selon dét $A = \pm 1$

$\Rightarrow \varepsilon =$ dét A.

Le dét A' = dét A $\Rightarrow$ dét $A' = \varepsilon \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$ dét $A \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$ et donc $\tilde{U}$ est une rotation.

Il existe alors une base orthonormée $\{f_1, f_2, f_3\}$ avec $f_1, f_2 \in \pi$ et $f_3 \in E_1$ (resp E_{-1})

En resumant

Proposition : Soit $A \in O(3,\mathbb{R})$, $A \neq \pm I$

Si $A = 1$, A représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ une rotation autour de l'axe E_1 ; l'angle de rotation est donné par : $\operatorname{Tr} A = 2\cos\theta + 1$

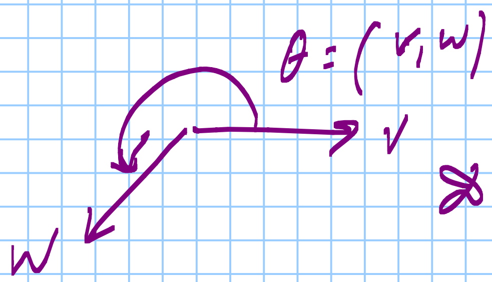
Si $A = -1$, A represente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ une rotation autour de l'axe E_{-1} suivi de la symetrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$. L'angle de rotation est donné par

$$\operatorname{Tr} A = 2\cos\theta - 1$$

En partic. si $\operatorname{Tr} A = 1$ on a $\theta = 0$ et A represente la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$ dite aussi une reflexion par rapport à $E_{-1}^{\perp}$.

6.5 Angle orienté

Dans $\mathbb{R}^2$ Etant donné un couple de vect. normés de $\mathbb{R}^2$ $\{v, w\}$ On appelle angle orienté entre v et w celui qui est compté dans le sens trigonométrique entre 0 et 2π et noté (v, w)

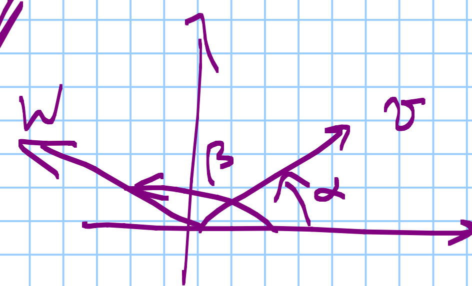


Dans une base canonique $\{e_i\}$

$$\sin\theta = \frac{\det \| v, w \|_{\{e_i\}}}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Soit $v = \|v\| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$w = \|w\| \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$



α, β - angles orientés avec l'axe Ox

$$\det \| v w \|_{\{e_i\}} = \|v\| \|w\| \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix} = \|v\| \|w\| (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)$$

$$= \|v\| \|w\| \sin(\beta - \alpha) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin\theta$$

<u>Remarque</u>

L'aire de parallelogramme

$$A(v, w) = \|v\| \|w\| |\sin\theta|$$

<u>Remarque</u>

On a $\sin\theta > 0 \iff \det(v, w)_{\{e_i\}} > 0$

ssi la base $\{v, w\}$ a la même orientation que la base canonique.

<u>Dans $\mathbb{R}^3$</u> angle orienté entre v et w?

sens trigonométrique?

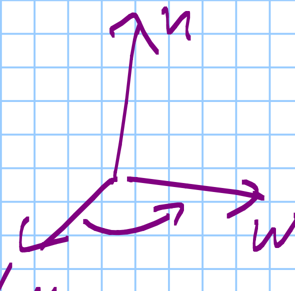
Il faut fixer l'orientation de la normale du plan. $\Pi = \mathrm{Vect}\{v, w\}$ - plan

$\Rightarrow$ orientation de Π :

$$\det \| v, w, \vec{n} \| > 0$$

règle de tire-bouchon (d'Ampère) en physique.

<u>angle orienté</u> :



$$\sin\theta = \frac{\det \| v, w, n \|_{e_i}}{\|v\| \|w\| \|n\|}$$

$$|\det \| v, w, n \|_{e_i}| = \mathrm{Vol}(v, w, n) = A(v, w) \cdot \|n\|$$
$$= \sin\theta \, \|v\| \|w\| \|n\|$$

Calcul de l'angle de rotation :
on choisi un vect. n de E_1 (rep E_1)
et un vect. du plan de rotation v
l'angle de rotation $(v, U(v))$:

$$\sin\theta = \frac{\det \| v, U(v), \vec{n} \|}{\|v\|^2 \|\vec{n}\|}$$

($\|U(v)\| = \|v\|$ U-orthogonal)

<u>Exemple</u> : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

On a ${}^tA = 0$
$\|c_i\|^2 = 1$ et $\langle c_i, c_j \rangle = 0$
transforme une base orthon. $\{e_i\}$ en une base orthon.

(Rappel : U est orthogonale ssi f transforme ~~toute~~ base orthonormée en une base orthonormée. En particulier ses colonnes doivent être orthogonales)

L'axe de rotation est déterminé par le vect. propre corresp. à la v.p. $\lambda=1$ valeur propre $\lambda=1$.

$$A-\lambda Id = A - Id \Rightarrow A - Id = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 2 \\ 2 & 2-3 & -1 \\ -1 & 2 & 2-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$v \in Ker(A-Id)$ – orthogonal à l'espace de colonnes

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \begin{cases} -a+2b-c=0 \\ -a-b+2c=0 \end{cases} \overset{4-2}{\Rightarrow} \begin{cases} b=c \\ a=b \end{cases}$$

E_1 est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'angle (non-orienté) de rotation suit de $Tr A = 2\cos\theta + 1$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

Pour trouver l'angle orienté on choisi un vect.-directeur de la normale : par exemple, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vect $u \in E_1^\perp$ ($E_1^\perp$ est le plan $x+y+z=0$). On peut prendre par exemple

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U(v) = U\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\sin\theta = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2 \cdot \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 3$$

$$\theta = \pi/3$$

ainsi A représente, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la rotation de l'angle $\pi/3$ autour de l'axe D dirigé et orienté par le vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$!

Donc $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

et $A = P D {}^tP$.