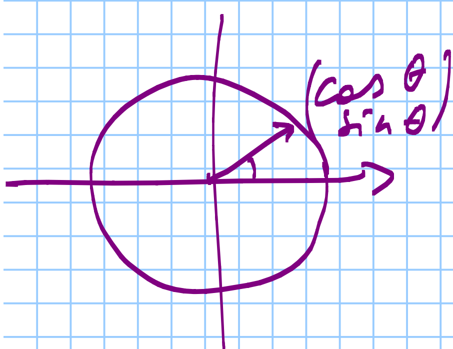
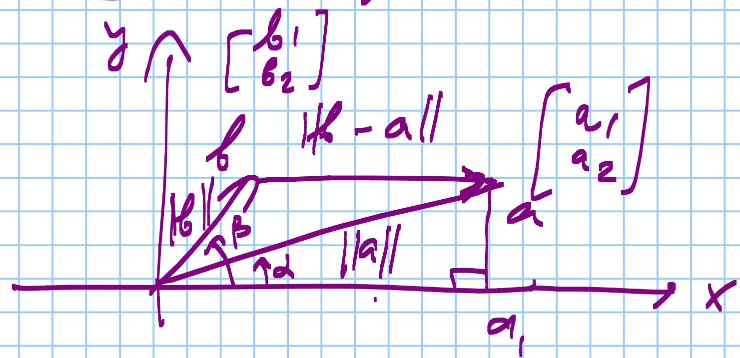
# Cours 5. Algèbre IV

## Chapitre 5 Projection et symétrie orthogonale

### 5.1 Cosinus d'un angle




$$\sin\alpha = \frac{a_2}{\|a\|} \qquad \cos\alpha = \frac{a_1}{\|a\|}$$

$$\sin\beta = \frac{b_2}{\|b\|} \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\|b\|}$$

$\underline{\theta = \beta - \alpha}$ $\quad \cos\theta = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$

Si produit euclid. canonique $\quad = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\|a\|\,\|b\|} = \dfrac{{}^T a\, b}{\|a\|\|b\|}$

**Déf** Le cosinus de l'angle $\theta$ formé par deux vecteurs $a$ et $b$ est

$$\boxed{\cos\theta = \frac{{}^T a b}{|a|\,|b|}}$$

(dépend pas de dim.)

Remarque : $\cos\theta = \frac{{}^T b a}{\|a\|\|b\|}$ aussi $\quad {}^T a b = \ldots = {}^T b a$

**Prop** $\|b-a\|^2 = \|b\|^2 + \|a\|^2 - 2\|b\|\cdot\|a\|\cos\theta$

Preuve : Si ${}^T a b = 0$ $(a \perp b)$ on a

$\cos\theta = 0$ et c'est le thm. de Pythagore

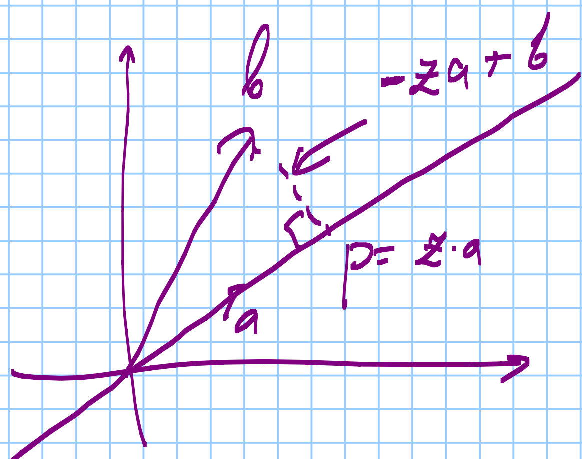
$$\|b-a\|^2 = {}^T(b-a)(b-a)$$

$$= {}^Tb\cdot b - {}^Tb\cdot a - {}^Ta\cdot b + {}^Ta\cdot a$$

$$= {}^Taa + {}^Tbb - 2\|b\|\|a\|\cos\theta$$

$$= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|b\|\|a\|\cos\theta$$

## 5.2 Projection sur une droite




$z$ est un nombre (un scalaire)

Comment calculer $z$ ?

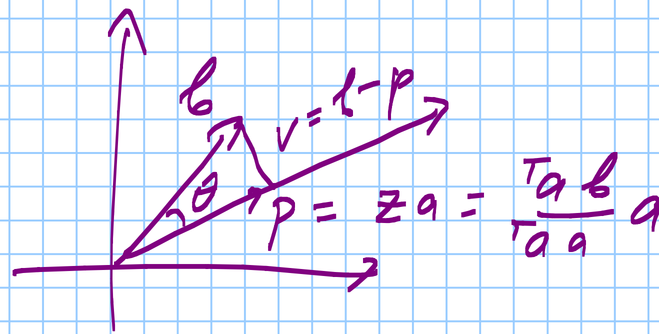
$$(b - za) \perp a \iff {}^Ta(b - za) = 0$$

$$\iff {}^Tab - z\,{}^Taa = 0$$

$$\iff z = \frac{{}^Tab}{{}^Taa}$$

**Déf/Prop** La projection orthogonale de $b$ sur la droite porté par $a$ est $p = za$ avec $z = \frac{{}^Tab}{{}^Taa}\cdot a$

**Remarque**




$$\cos\theta = \frac{{}^T a\, b}{\|a\|\|b\|}$$

On a $\|v\| = \|b - p\|^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \left\| b - \frac{{}^T a b}{{}^T a a} a \right\|^2 = {}^T\!\left(b - \frac{{}^T a b}{{}^T a a} a\right) \cdot \left(b - \frac{{}^T a b}{{}^T a a} a\right)$$

$$= {}^T b\, b - 2 \frac{{}^T a b}{{}^T a a} {}^T b\, a + \left(\frac{{}^T a b}{{}^T a a}\right)^2 {}^T a\, a$$

Remarque
${}^T x \cdot y = {}^T y \cdot x$

$$= {}^T b\, b - \frac{({}^T a b)^2}{{}^T a a} = \frac{{}^T b \cdot b \cdot {}^T a a - ({}^T a b)^2}{{}^T a a} \geq 0$$

$$\Rightarrow {}^T b\, b \cdot {}^T a a \geq ({}^T a\, b)^2$$

On a ~~redecouvert~~ l'inégalité de Schwarz :

$$\langle a, b \rangle \leq \sqrt{\langle a, a \rangle} \cdot \sqrt{\langle b, b \rangle}$$

**Remarque** comme $\frac{{}^T a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|} = \cos\theta$

L'inégalité de Schwarz est équivalent à $|\cos\theta| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \cos\theta \leq 1$

**Remarque** On a l'égalité ssi $a \parallel b$ i.e $\cos\theta = 1$, soit $\theta = 0$

Exemple $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ projection sur la droite portée par $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$z = \frac{{}^T a b}{{}^T a a} = \frac{6}{3} = 2$$

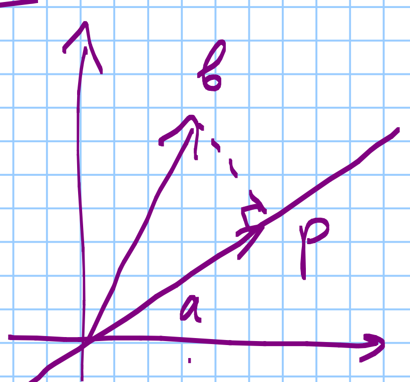
$$p = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\cos \theta = \frac{\|p\|}{\|b\|} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{14}}$$

(par la formule $\cos \theta = \frac{{}^T a b}{\|a\| \|b\|} = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{14}}$)

Cauchy-Schwarz : $6 \leq \sqrt{3}\sqrt{14}$ En effet $36 < 42$

## 5.3 Matrice de projection de rg 1




$$p = \underbrace{\frac{{}^T a b}{{}^T a a}}_{\in \mathbb{R}} a = a \cdot \frac{{}^T a \cdot b}{{}^T a \cdot a}$$

$$= \underbrace{\frac{a \cdot {}^T a}{{}^T a \cdot a}}_{P} b$$

multiplic de matrices est associative.

$P$ – la matrice de projection!

**Def** Matrice de projection de $b$ sur la droite porté par $a$ est

$$P = \frac{a \, {}^T a}{{}^T a \, a}$$

(i.e. la matrice $P$ t.q. $Pb = p$)

Exemple Projection sur $a = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$P = \frac{a\,{}^Ta}{{}^Ta\cdot a} = \frac{1}{(1\,1\,1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\,1\,1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$P\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \quad !$$

Remarques

* $P^2 = P$
* $P$ est symétrique $P = {}^TP$
* $\mathrm{Im}\,P = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
* $\mathrm{Ker}\,P$ = plan perpendiculaire à $a$
  par ex. $\mathrm{Ker}\,P \ni \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
* $\mathrm{rg}\,P = 1$.

Ne dépend pas de longueur de $a$ :

$$a = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} : P = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}(2\,2\,2) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}4&4&4\\4&4&4\\4&4&4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

## 5.4 Projections et méthode des moindres carrées

$Ax=b$ possède des solus si $b \in \mathrm{Im}(A)$ = colonnes de $A$.

Sinon, le système est inconsistant et il n'y a pas de solutions.

**Exemple**
$$\begin{cases} 2x = b_1 \\ 3x = b_2 \\ 4x = b_3 \end{cases}$$
a une solution si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

En pratique, on a souvent des systèmes inconsistant - on veut minimiser l'erreur. On cherche une solution $x$ t.q. $E^2=(2x-b_1)^2+(3x-b_2)^2+(4x-b_3)^2$ soit minimale.

S'il existe une solution exacte $E=0$. Lorsque $b \in \mathrm{Vect}[a]$

le graphe de $E^2(x)$ est un parabole et l'erreur minimale

$$\frac{dE^2}{dx} = 2\left(2(2x-b_1)+3(3x-b_2)+4(4x-b_3)\right)=0$$

$2^2x - 2b_1 + 3^2\cdot x - 3b_2 + 4^2\cdot x - 4b_3 = 0$

La soln des moindres carrés de

$ax = b$ est.

$$\hat{x} = \frac{2b_1 + 3b_2 + 4b_3}{2^2+3^2+4^2} = \frac{{}^Ta\cdot b}{{}^Ta\cdot a}$$

<u>Cas général dans $\mathbb{R}^n$</u> : résoudre

$ax = b$ en minimisant

$$E^2 = \|ax-b\|^2 = (a_1x - b_1)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2$$

La dérivée de $E^2$ est 0 en $\hat{x}$

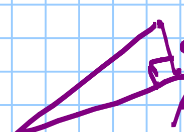
$$\frac{dE^2}{dx}(\hat{x}) = 0 \Rightarrow (a_1\hat{x} - b_1)a_1 + \dots + (a_n\hat{x} - b_n)a_n = 0$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{a_1b_1 + \dots + a_nb_n}{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

<u>Déf</u> La solution des moindres carrés pour $ax = b$ dans $\mathbb{R}^n$ est $\hat{x} = \frac{{}^Tab}{{}^Taa}$

<u>Remarque</u> Erreur : $b - \hat{x}a$ doit être orthogonale à $a$ ! En effet,

$${}^Ta(b - \hat{x}a) = {}^Tab - \frac{{}^Tab}{{}^Taa}\,{}^Ta\cdot a = 0$$

appelation moindres carrés :  ← minimale

projection !

## 5.5 méthode des moindres carrées dans le cas de plusieurs variables



$$Ax = b \quad , \quad A = m\left[\quad\right]^{n} \; x = \left[\quad\right] n \; b = \left[\quad\right] m$$

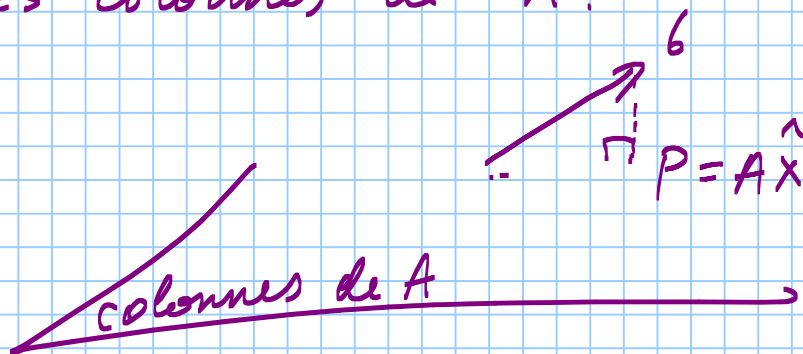
Le système est inconsistant si

$b \notin$ Colonnes $(A) = \mathrm{Im}\, A$.

Question : trouver $\hat{x}$ qui minimise l'erreur.

Erreur $E = \|A\hat{x} - b\|$

C'est la distance de $b$ à l'espace des colonnes de A.




Trouver $\hat{x}$ minimisant l'erreur

= c'est trouver $A\hat{x} \in$ Colonnes de A qui est le plus proche de b.

$P = A\hat{x}$ doit être la projection orthogonale de b sur Colonnes (A) i.e.

$$r = b - A\hat{x} \perp \text{colonnes } (A)$$

Or $(\text{Collonnes de } A)^{\perp} = \ker({}^{T}A)$

Donc le vecteur d'erreur

$r = b - A\hat{x}$ doit vérifier

$${}^{T}A(b - A\hat{x}) = 0$$

Soit $${}^{T}AA\hat{x} = {}^{T}Ab$$

__Rmq__ Cela revient à dire que

$b - A\hat{x}$ est orthogonal à toutes les colonnes de $A$

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} - {}^{T}a_1 - \\ \vdots \\ - {}^{T}a_n - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b - A\hat{x} \end{bmatrix} = 0$$

Dans ce fait on multiplie $Ax = b$ par ${}^{T}A$ : $${}^{T}AAx = {}^{T}Ab$$

__En resumant__ : i) Lorsque le système $Ax = b$ est inconsistant (pas de solu) la solution de moindre carrées qui minimise $\|Ax - b\|^2$ vérifie

$$\boxed{{}^{T}AA\hat{x} = {}^{T}Ab}$$

2) ${}^{T}\!AA$ est inversible lorsque les colonnes de $A$ sont linéairement indépendantes. La meilleure approxim. de $x$ est $\boxed{\hat{x} = ({}^{T}\!AA)^{-1}\,{}^{T}\!A b}$

3) La projection de $b$ sur l'espace de colonnes $A$ est

$$A\hat{x} = \underbrace{A\,({}^{T}\!AA)^{-1}\,{}^{T}\!A}_{\text{matrice de projection}}\,b \qquad \left(\frac{a\,{}^{T}\!a}{{}^{T}\!a\,a}\right)_{x\text{-vect.}}$$

<u>Ex.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ n'a pas de solu. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 3y = 5 \\ 0 = 6 \end{cases}$

Collonnes $A \subset$ plan $(x, y)$

$${}^{T}\!A\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = 26 - 25 = 1$$

$$\hat{x} = ({}^{T}\!AA)^{-1}\,{}^{T}\!A b = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La meilleure façon de resoudre le système est $\hat{x}_1 = 2$ ; $\hat{x}_2 = 1$

L'erreur est $E = b - \underbrace{A\hat{x}}_{\text{projection}} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}4 & - & 2 & - & 2\\ 5 & - & 2 & - & 3\\ 6 & & 0 & & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$$

projection.

<u>Rem 1</u> si $b \in$ Colonnes$(A)$ i.e.

$\exists x$ t.q. $b = Ax$

$$p = A({}^tA A)^{-1}\,{}^tA \underset{\underset{Ax}{\shortparallel}}{b} = Ax = b$$

<u>Rem 2</u> Si $b \perp$ à toutes les colonnes de $A$ i.e. ${}^tA\,b = 0$

$$P = A({}^tA A)^{-1}\,{}^tA b = 0$$

<u>Rem 3</u> si $A$ est carré et inversible

Colonnes$(A) = \mathbb{R}^n$

$$P = A({}^tA A)^{-1}\,{}^tA b = A A^{-1}({}^tA)^{-1}\,{}^tA b = b.$$

## <u>Propriétés de la matrice ${}^tA A$</u>

1) ${}^tA A$ est symétrique

2) $\ker {}^tA A = \ker A$ si $x \in \ker A$, alors $x \in \ker {}^tA A$

si $x \in \ker {}^tA A$, ${}^tA A x = 0 \Rightarrow {}^tx\,{}^tA A x = 0 \Rightarrow \|Ax\|^2 = 0$

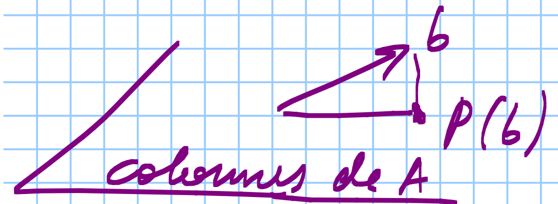
$\Rightarrow Ax = 0$

3) Si les colonnes de $A$ sont linéairement indépendantes

${}^tA A$ est - carré
- symétrique
- inversible.

<u>Déf</u> : La matrice de projection est

$$\boxed{P = A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA}$$




<u>Prop</u> La matrice de projection

$$P = A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$$

vérifie 1) $P^2 = P$
2) ${}^tP = P$

Inversement, toute matrice $H$ t.q. $H^2 = H$ et ${}^tH = H$ représente une projection.

<u>Preuve</u> :

$$P^2 = A({}^tAA)^{-1}\underbrace{{}^tAA\,({}^tAA)^{-1}}_{Id}\,{}^tA = A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA = P$$

La projection de la projection est la projection.

$$ {}^T P = {}^T\left(A\,({}^TA A)^{-1}\,{}^TA\right) = {}^T({}^TA)\,\underbrace{{}^T({}^TA A)^{-1}}_{\text{matrice}}\,{}^TA = P $$

$${}^T({}^TA\,A) = {}^TA \cdot A$$ donc a le meme pour l'inverse.

**Reciproque :**

Supposons que $H$ vérifie $H^2 = H$ et ${}^TH = H$.

M.q. $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $Hb$ est le projection sur l'espace de colonnes $(H)$ :

M.q. $b - H.b \perp$ Colonnes$(H)$

Un element dans $\in$ colonnes$(H)$

$$c_1 h_1 + \dots + c_m h_m = (h_1 \dots h_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

i.e. $b - Hb \perp H \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{c}$

$$\iff {}^T(b - Hb) \cdot Hc = 0$$

En effet : ${}^T(b - Hb)Hc = {}^T((I - H)b)\,Hc$

$$= {}^Tb\,(I-H)^T H c \underset{{}^TH = H}{=} {}^Tb\,(H - {}^TH H)\,c$$

$$= {}^Tb\,(H - H^2)\,c \underset{H = H^2}{=} {}^Tb \cdot 0 \cdot c = 0 \;!$$

## 5.6 Endomorphisme : projection orthog.

Soit $F$ un ss esp. de $E$

La projection orthogonale sur $F$ est l'applic linéaire

$$p_F : E = F \oplus F^{\perp} \longrightarrow E$$

définie par $p_F(x) = y$ où $x = y + z$
$y \in F$ et $z \in F^{\perp}$

Propriétés (1) $p_F \circ p_F = p_F$ , $\ker p_F = F^{\perp}$
$\operatorname{Im} p_F = F$

(2) $\forall x, x' \in E \quad \|x - x'\| \geq \|x - p_F(x)\|$

(3) $p_F$ est symétrique

(4) Soit $p = \dim F$. Dans une base de $E$ reunion d'une base de $F$ et d'une base de $F^{\perp}$, la matrice de $s_F$ est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_p$ - matrice unité d'ordre $p$.

## 5.7 Symétrie orthogonale

**Déf** L'applic. linéaire

$s_F : E = F \oplus F^\perp \longrightarrow E$ définie par

$s_F(x) = y - z$ où $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$

est appelée la symétrie orthogonale par rapport à $F$.

**Propriétés** : 1) $s_F \circ s_F = \mathrm{Id}$

2) pour $\forall\, y \in F$ $s_F(y) = y$ et $\forall\, z \in F^\perp$, $s_F(z) = -z$

3) $s_F$ est symétrique (sa matrice $S = {}^tS$)

4) Soit $p = \dim F$ Dans une base de réunion de $F$ et d'une base de $F^\perp$

La matrice de $s_F$ est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$

**Remarque** $s_F = 2P_F - \mathrm{Id}$.

**Exemple** Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et d'une base orthon.

a) Déterminer la matrice dans cette base de la projection orthogonale $p$ sur la droite d'éq. $y = 3x$

b) Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale $S$ par rapport à la droite $y = 3x$.

**Solution**

a) On a vect. directeur de la droite $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a $P = \dfrac{a \cdot {}^T a}{{}^T a \, a}$, $a\,{}^T a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

${}^T a \, a = 1 + 9 = 10$

$$P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

b) le vect. directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ :

$$P_F = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$S_F = 2 P_F - I = \begin{pmatrix} 2/10 & 6/10 \\ 6/10 & 18/10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

**Une autre méthode** :

On peut trouver le $a$ et le $b$ en faisant le calcul dans la base ortogonale : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

dans laquelle $H_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il faut alors trouver la matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

Dans la base canonique alors c'est

$$C \, H_F \, C^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

---

__Rappel__

Comment chercher les coordonées du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?

On a la matrice de passage de la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donnée par $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ c'est a dire que

Si on a un vecteur $a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ il y aura les coordonnées

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 3b \\ 3a + b \end{pmatrix}$$

Si au contraire on veut exprimer les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ il faut utiliser la matrice inverse

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Et la matrice de l'applic. linéaire de projection sera $C^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - on se trouve les coordonnées dans la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Et après avoir appliquer $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ il faut revenir en $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ comme base par la matrice $C$, d'où $P = C H_F C^{-1}$