Algèbre IV - Chapitre 2
Produit scalaire

2.1. Déf

E - $\mathbb{R}$-e.v.

$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire

$\forall x, y \in E$
$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ — symétrique

$\forall x \in E$
$\langle x, x \rangle \geq 0$ — positive

si $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ $(0 \in E)$ — définie.

Rq φ sym et linéaire à gauche implique linéaire à droite.

Terminologie Espace vect. réel + produit scalaire = Pré-HILBERTIEN réel

Esp. v. réel de dim finie + produit scalaire = Esp. euclidien

Notation $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\langle \, | \, \rangle$, $(\cdot | \cdot)$, $- \bullet -$ ...

2.2 Exemples fondamentaux.

Sur $\mathbb{R}^n$ 1) $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ (dite produit scalaire usuel)

2) soient $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\langle x, y \rangle = \alpha_1 x_1 y_1 + \ldots + \alpha_n x_n y_n$ est un produit sc.

Sur $E = \mathcal{C}([0,1])$

- $(f, g) \mapsto \int_0^1 f g \, dt$.
- $(f, g) \mapsto \int_0^1 f g \rho \, dt$ ρ - fct continue à valeurs positive s'annulant à un # fini de pts

Ex. $\rho = \sin \pi t$

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$
- $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$
- $\langle P, Q \rangle = \int_{2,53}^{0,525} PQ$
- $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)\,Q(k)$

Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ - matrices $n \times n$

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij})$$

$$\langle A, B \rangle = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}\, b_{ij} = \operatorname{tr}\, {}^t\!A B \quad \text{(vérification)}$$

2.3 Cauchy-Schwarz

Prop $\langle\ ,\ \rangle$ bi-lin. sym. sur $E \times E$

1) Si $\langle\ ,\ \rangle$ positive (i.e. $\forall x \in E\ \langle x, x \rangle \geq 0$)

$\forall x, y \in E$ on a $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$

2) Si $\langle\ ,\ \rangle$ déf positive égalité $\iff x, y$ liés. (preuve à suivre)

2.4 Norme associée

Une norme sur E $N : E \to \mathbb{R}_+^*$

t.q. :
- $N(x) = 0 \iff x = 0$
- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ homogénéité
- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ inég triang.

Prop. $\langle\ ,\ \rangle$ - produit scalaire sur E
alors $x \mapsto \langle x, x \rangle^{1/2}$ défini une norme.

Rq On dit que $\|\cdot\|$, associée à $\langle , \rangle$ est une norme euclidienne

(Il y en a des normes non-euclidiennes comme sur $\mathbb{R}^2$ $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$

ou sur $\mathcal{C}[0,1]$, $\|f\|_\infty = \max |f|$.

2.5. Inégalité de parallélogramme
(Fiche 1, exo 8)

Idée : on peut exprimer le produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de normes de ses vecteurs

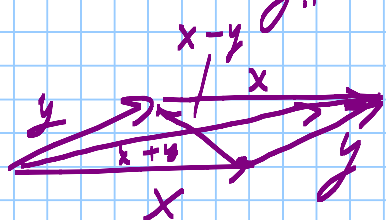
Formules de polarisation :

$(x,y) \in E^2$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Prop. Si $x, y \in E$ alors

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$



. somme des carrés de longueurs de diags = somme des carrés de longueurs de cotés.

on reprend avec la preuve

2.3bis) Inégalité Cauchy-Schwarz — Cours 2

Prop Soit $\langle \cdot , \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique sur E (esp. vect.)

- Si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est positive, alors
$$\forall x,y \in E, \quad |\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle$$
- Si de plus $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est défini (i.e. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire)

alors on a égalité ssi x et y sont liées. (i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $x = \lambda y$)

Démo: on va étudier une applic.

$$\lambda \longmapsto \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle$$

qui doit être positive ou zéro $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Par linéarité on a:

$$\langle \lambda x+y, \lambda x+y \rangle = \lambda^2 \langle x,x \rangle + 2\lambda \langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle \geq 0$$

Un polynôme $a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$ si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$

Ici : $\Delta = (2\langle x,y \rangle)^2 - 4 \cdot \langle x,x \rangle \cdot \langle y,y \rangle$

$\Rightarrow 4\langle x,y \rangle^2 - 4\langle x,x \rangle \cdot \langle y,y \rangle \leq 0$

$\Leftrightarrow \langle x,y \rangle^2 \leq \langle x,x \rangle \cdot \langle y,y \rangle$

négative

deux racines pas permis

$A = {}^tA$ et $B = {}^tB$

Exo/ Soient A et B - deux matrices symétriques

m.q. $\left(tr(AB+BA)\right)^2 \leq 4\, tr\, A^2 \cdot tr\, B^2$

Sol/ Le produit scalaire des matrices :

$$\langle A|B\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\, b_{ij} = tr({}^tA B)$$

- Cauchy-Schwarz :

$$\langle X|Y\rangle^2 \leq \langle X|X\rangle \langle Y|Y\rangle$$

$$tr(AB+BA) = tr(AB) + tr(BA)$$

$a_{ij} = a_{ji}$ et $b_{ij} = b_{ji}$

et $$tr\, AB = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ji}\, b_{ij} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\, b_{ij}$$

$$tr\, BA = \sum_{1\leq i,j\leq n} b_{ji}\, a_{ij} = \sum a_{ij}\, b_{ji}$$

$$= \sum a_{ij}\, b_{ij} = tr AB$$

-

$$tr BA = tr\, AB = tr\, {}^tAB = \langle A|B\rangle$$

$$\left(tr(AB+BA)\right)^2 = \left(2\, tr\, {}^tAB\right)^2 = 4\langle A|B\rangle^2$$

Cauchy-Schwarz

$$4\langle A|B\rangle^2 \leq 4\langle A|A\rangle \cdot \langle B|B\rangle = 4\, tr\, A^2 \cdot tr\, B^2$$

2.6. Cas complexe E - $\mathbb{C}$ e.v.

La définition $\langle \cdot , \cdot \rangle$ sym. déf. positive

$\forall x$, si $x \neq 0$ $\langle x, x \rangle > 0$ et en particulier $\langle ix, ix \rangle > 0$

on a donc $\langle ix, ix \rangle = i^2 \langle x, x \rangle = - \langle x, x \rangle > 0$

contradiction car $\langle x, x \rangle > 0$

On remplace "symétrique" par "hermitien"
et "bilinéaire" par "sesquilinéaire"

Déf : Produit scalaire est une application : $E \times E \to \mathbb{C}$

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- linéaire à droite
  (à gauche semi-linéaire :
  $\langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$
- défini-positive

Norme associé : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est bien une norme
- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ homogénité
- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Exemples sur $\mathbb{C}^n$: $\langle x, y \rangle = {}^t\bar{X} Y = \bar{x}_1 y_1 + \ldots + \bar{x}_n y_n$

On remarque :

$\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$

$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle$

Si $z = a + ib$

$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2 \operatorname{Re} z$.

Comparatif Normes associé

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$	$\|x+y\| = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$
$\|\alpha x\|^2 = \|\alpha\|^2 \|x\|^2$	$\|\alpha x\|^2 = \alpha\bar{\alpha}\,\|x\|^2 = \|\alpha\|^2\|x\|$
$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$	$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$
	$\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$

Terminologie E e.v. complexe avec un prod. scalaire hermitien de dim. finie = Espace hermitien

Rq Cauchy-Schwarz : même énoncé.

Résumé du Ch2 :
- Produit scalaire
- Norme associé
- Identité de parallelogramme (polarizat.
- Inég. Cauchy-Schwarz
- Produit hermitien (cas complexe)