Fiche 1 - Combinatoire

1 - Quelques problèmes

Exercice 1. Combien le mot ANAGRAMME a-t-il d'anagrammes ?

Exercice 2.

1. Dix personnes participent à un marathon. Combien d'ordres d'arrivée sont-ils possibles ?

2. Assumons que seulement les trois premiers arrivés gagnent des médailles. Combien y a-t-il de possibilités pour la liste des médailles ?

3. Parmi les dix personnes qui participent au marathon, trois personnes exactement doivent s'habiller avec un maillot jaune. Pour calculer de combien de façons on peut choisir ces trois personnes on raisonne comme suit:
Il y a 10 possibilités pour choisir la première personne, 9 pour choisir la deuxième, et 8 pour le troisième. Cela nous donne $10 \times 9 \times 8$ possibilités.
Ce raisonnement est-il correct ?

Exercice 3.

1. Vous devez choisir un mot de passe pour un compte informatique. Le mot de passe peut contenir les chiffres de 0 à 9 sans restriction et peut avoir de 4 à 7 caractères. Combien de mots de passe pouvez-vous obtenir ?

2. Supposons qu'un voleur vous a vu composer votre mot de passe et qu'il souhaite se connecter à votre compte. Il a observé que le code est formé de 5 chiffres, ne commence pas par 0, et contient au moins un 8. De combien d'essais a-t-il besoin (au plus) pour trouver votre code ?

Exercice 4. La population de New York est de plus de 8 500 000 habitants. Prouver que, actuellement, à New York, il y a au moins 7 habitants qui sont nés à la même heure, le même jour de la même année.

Exercice 5. Soit $1, 3, 7, 15, \ldots$ la suite dont le i-ème terme est $a_i = 2^i - 1$. Soit q un entier impair. Montrer que la suite des $(a_i)_i$ contient au moins un élément divisible par q.

Exercice 6. De combien de façons différentes peut-on placer p tours sur un échiquier de taille n de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre?

Exercice 7.

1. Combien de sous-ensembles de $[\![1, 10]\!]$ contiennent au moins un entier impair ?
2. De combien de façons 7 personnes peuvent-elles s'asseoir autour d'une table ronde en sachant que deux arrangements sont considérés les mêmes si chaque personne a les mêmes voisins (pas nécessairement du même côté) ?
3. Combien de permutations π de S_6 vérifient $\pi(1) \neq 2$?
4. De combien de façons peut-on ordonner les lettres du mot `MISSISSIPPI` de sorte que les 4 `S` n'apparaissent pas consécutivement ?

Exercice 8. Trois écoles doivent se répartir 15 tableaux noirs. De combien de manières peuvent-elles se les répartir? Qu'en est-il si chaque école doit recevoir au moins un tableau?

Exercice 9. Un chemin Nord-Est (NE) est un chemin dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ formé par des pas horizontaux de la forme $(1, 0)$ et verticaux de la forme $(0, 1)$.

1. Combien de chemins NE vont du point $(0, 0)$ au point (k, m) ?
2. De combien de façons peut-on peut aller du point $(0, 0)$ au point $(6, 4)$, si on veut passer aussi par le point $(4, 2)$?

2 - Formules et cardinaux d'ensemble

Exercice 10. Montrer de deux façons différentes que le nombre de sous-ensembles d'un ensemble S avec $|S| = n$ est 2^n.
Indication : on pourra considérer une bijection avec l'ensemble $\{0; 1\}^n$.

Exercice 11. Soient X, Y, Z trois ensembles finis tels que $|X| = 10$, $|X \cap Y| = 7$ et $|X \cap Z| = 9$. Déterminer les valeurs possibles pour $|X \cap Y \cap Z|$. Même question avec $|X| = 15$, $|Z| = 20$ et $|Y \cap Z| = 8$.

Exercice 12. Soit X un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de X tels que :

$$(i)\ A \subset B\ ; \quad (ii)\ A \supset B\ ; \quad (iii)\ A \cap B = \emptyset.$$

Exercice 13. Donner une preuve combinatoire ou polynomiale des identités suivantes.

1. $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$.
3. $\displaystyle 2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}$.
4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.
6. $\displaystyle\sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.
7. $\displaystyle\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ (Identité de Vandermonde).
8. $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 14. Montrer que, pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Indication : on pourra considérer le problème suivant :
On forme, avec n personnes, un comité de taille $k, k \leq n$, et une des personnes choisies est désignée comme président-e du comité. Compter ensuite de deux manières différentes le nombre de choix possibles.

4 - Coefficients multinomiaux

Exercice 15. Développer l'expression $(x + y + z + t)^3$.

Exercice 16. Des parents souhaitent offrir un total de 7 cadeaux à leurs 3 enfants. Le benjamin en recevra 3 et les autres 2. De combien de manières peuvent-ils procéder?

Exercice 17. Dans un cours de danse, il y a 40 personnes : 20 femmes et 20 hommes. On demande aux danseurs et aux danseuses de former des couples au hasard, sans forcément que ces couples soient mixtes.

1. Quelle est la probabilité qu'aucun des vingt couples formés ne soient mixtes?
2. Quelle est la probabilité que tous les couples soient mixtes?
3. Donner une valeur approchée des deux probabilités calculées précédemment en utilisant l'équivalent de Stirling :

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

3 - Fonctions génératrices

Exercice 18. Soit $f(n, k)$ le nombre de sous-ensembles de cardinal k de $[\![1, n]\!]$ qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs.

1. Calculer la fonction génératrice $F_1(x) = \sum_{n\geq 1} f(n, 1)x^n$.
2. Justifier la formule de récurrence suivante : $f(n+1, k) = f(n, k) + f(n-1, k-1)$.
3. Calculer la fonction génératrice $F_k(x) = \sum_{n\geq 1} f(n, k)x^n$
4. En déduire que $f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$.