Fiche 6

Séries entières

Exercice 1 (Rayon de convergence) Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes ($z \in \mathbb{C}$) :

1. $\sum_n (-1)^n (n+3)!\, z^n$,
2. $\sum_n n^n z^n$,
3. $\sum_n \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$,
4. $\sum_n \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$,
5. $\sum_n z^{n!}$,
6. $\sum_n (1+1/n)^{(n^2)} z^n$,
7. $\sum_n (1+(-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$.

Exercice 2 (Rayon de convergence) Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n a_n z^{3n}$,
2. $\sum_n a_n 3^n z^{2n}$.

Exercice 3 (Rayon de convergence) Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

1. $\sum_n (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1}$,
2. $\sum_n \frac{n!}{1.3\ldots(2n+1)} z^{2n+3}$.

Exercice 4 (Rayon de convergence) Déterminer le rayon de convergence, R, de $\sum_n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

Exercice 5 (Vrai ou faux)

1. Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
2. Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

Exercice 6 (Séries entières : calcul explicite)

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum_n x^n$.
2. En utilisant l'expression des sommes partielles d'une série géométrique, montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1/(1-x)$.
3. En déduire le rayon de convergence des séries entières associées et déterminer la valeur des sommes suivantes pour x dans l'intervalle ouvert de convergence :
   a. $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$,
   b. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$,
   c. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$,
   d. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1}x^n$,

Exercice 7 (Rayon de convergence)

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
2. Calculer les dérivées successives de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.
3. En utilisant Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(x)$.
4. En déduire le rayon de convergence et la somme de $\sum_n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Exercice 8 (Séries entières et équations différentielles)
Déterminer les séries entières dont la fonction somme est solution de

$$x^2 f''(x) - x(2x^2-1)f'(x) - (2x^2+1)f(x) = 0.$$

Calculer le rayon des séries entières obtenues.

Exercice 9 (Série entières et équation différentielles)
On considère l'équation différentielle

$$f''(x) - 4f(x) = 0. \tag{1}$$

On cherche f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$.

Montrer que la seule solution est $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1}}{(2p)!} x^{2p}$, et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 10 (Série entières et équation différentielles)
On cherche le développement en série entière de $f(x) = (1+x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, par la "méthode de l'équation différentielle".

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0. \tag{2}$$

   (Auriez-vous pu déterminer vous-même cette équation différentielle ?)

2. Déterminer les solutions de (2) développables en séries entières et calculer leur rayon de convergence.
3. Montrer que si g est solution de l'équation (2) sur un intervalle I contenu dans $]-1,+\infty[$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ g(x) = C(1+x)^\alpha$.

Exercice 11 (Séries de Taylor)
Donner un exemple de fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ mais dont la série de Taylor ne converge pas sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (Séries de Taylor) Exemple classique (mais un peu lourd) : la série de Taylor converge, mais **pas vers la fonction !**

On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-1/x^2)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 13 (Développements en série entière)
Développer en série entière autour de 0 les fonctions suivantes et déterminer les rayons de convergence des séries entières obtenues :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x-5}$,
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+9x^2}$,
3. $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$,
4. $x \longmapsto \ln(5-x)$.
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{(2+x)^3}$,
6. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt[5]{32-x}}$,
7. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

Exercice 14 (Développements en série entière en un point différent de 0)
Développer en série entière les fonctions suivantes au point donné :

1. $x \longmapsto \ln(x)$ en 1 puis en 2,
2. $x \longmapsto \sin(x)$ en $\pi/4$,
3. $x \longmapsto e^x$ en $x_0 \in \mathbb{R}$,
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ en 2.