Fiche 5

Série de fonctions

Exercice 1 (Convergence simple et normale)
Etudier la convergence simple, la convergence normale puis la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.
2. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$.
3. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$.

Exercice 2 (Convergence simple, uniforme et normale)
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle elle converge normalement.

Exercice 3 (Série de fonction, intégrale, et dérivée)
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$.
4. Montrer que $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (Classe $\mathcal{C}^\infty$)
On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5 (Règle d'Abel uniforme)
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n+x}$ pour $x \in [-\pi, -\pi/2]$.

1. En utilisant la règle d'Abel uniforme, montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-\pi, -\pi/2]$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[-\pi, -\pi/2]$.

Exercices d'entraînement

Exercice 6 Montrer que les séries suivantes ne convergent pas normalement sur l'intervalle I indiqué en montrant que $\sum ||f_n||_\infty$ diverge.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^n}$ sur $I = [1,2]$,
2. $\displaystyle\sum_{n=}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 7 Montrer que les séries suivantes ne convergent pas normalement ni uniformément sur l'intervalle indiqué I en trouvant $(x_n)_n$ tel que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{xn^2}$ sur $I =]0,\infty[$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/x}$ sur $I =]0,\infty[$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$ sur $I = [0,1[$,
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ sur $I =]0,\infty[$,
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ sur $I = [0,\infty[$.

(Indication : Si le dénominateur est la somme de deux termes positifs, l'argument x_n est souvent la valeur où les deux termes sont égaux.)

Exercice 8 Montrer que les séries suivantes ne convergent pas normalement sur l'intervalle I indiqué en trouvant $(x_n)_n$ tel que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $I =]0,\infty[$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^3}{n^4+x^4}$ sur $I = [0,\infty[$.

Exercice 9 Montrer que les séries suivantes convergent normalement sur l'intervalle I indiqué en montrant que $\sum ||f_n||_\infty$ converge.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2x}$ sur $I = [1,2]$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $I = [1,\infty[$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ sur $I = [0,1]$.

Exercice 10 Montrer que les séries suivantes convergent normalement sur l'intervalle I indiqué, en trouvant $(a_n)_n$ tel que $|f_n(x)| \leq a_n\ \forall x$ et $\sum a_n$ converge.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^4+x^2}$ sur $I = [0, \infty[$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(x^2+1)} + e^{-n((x+1)^2+1)}$ sur $I = \mathbb{R}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ sur $I = [0, a]$, $a < 1$.

(Indication : Si le dénominateur est la somme de deux termes positifs, on trouve souvent deux majorations pour deux parties de l'intervalle en supprimant un des deux termes en faisant la différence si x est plus grand ou plus pétit que la valeur où les deux termes sont égaux.)

Exercice 11 Montrer que les séries suivantes convergent uniformément en utilisant la règle d'Abel uniforme = théorème d'Abel-Dirichlet.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$ sur $I = \mathbb{R}^+$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx)}{x^2+n+1}$ sur $I = [\pi/2, \pi]$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{ixn}}{nx}$ sur $I = [1, \pi]$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $I = [0, \infty[$.

Exercice 12 Énoncer les conditions des théorèmes du cours qui impliqueraient les identités et propositions suivantes et déterminer si elles sont vérifiées :

1. $\displaystyle(\sum_{n\geq 0} x^n)' = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ sur $]-1, 1[$,
2. $\displaystyle(\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx)}{n^2})' = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ sur $\mathbb{R}$,
3. $\displaystyle(\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx)}{n^3})' = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-xn}$ continue sur $]0, \infty[$.