# Corrigé du DS 1

1) • $\|x\|_2 = 0 \Rightarrow \sum_i |x_i|^2 = 0 \Rightarrow |x_i|^2 = 0 \ \forall i \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i \Rightarrow x = 0.$ 0,5

• $\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_i |\lambda|^2 |x_i|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \ \|x\|.$ 0,5

• $\|x+y\|_2^2 = \sum_i (x_i+y_i)^2 = \sum_i x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2 \leq \sum_i x_i^2 + 2\left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_i y_i^2\right)^{1/2} + \sum_i y_i^2$

$= \left[\left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_i y_i^2\right)^{1/2}\right]^2 = \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2$ 1,5

$\boxed{2,5}$

Donc $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

2) a) • $N(A) = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \ \forall x / \|x\| = 1.$

$\Rightarrow \|Ax\| = 0 \ \forall x$ car $\|Ax\| = \|x\| \ \|A \frac{x}{\|x\|}\| = 0.$ 1,5

• $N(\lambda A) = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda A x\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda| \ \|Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$ 0,5

• $N(A+B) = \sup_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| \leq \sup \|Ax\| + \|Bx\| \leq \sup \|Ax\| + \sup \|Bx\| = N(A) + N(B).$ 0,5

b) $\|Ax\| = \|A \frac{x}{\|x\|}\| \ \|x\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \ \|x\| = N(A) \ \|x\|.$ 1,5

$N(AB) = \sup \|ABx\| \leq \sup N(A)\|Bx\| = N(A) \sup \|Bx\| = N(A) \ N(B)$ 1

$\boxed{5}$

3) • $N_1(P) = 0 \Rightarrow P^{(k)}(0) = 0 \ \forall k$ mais $a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(0) \Rightarrow a_k = 0 \ \forall k \Rightarrow P = 0.$ 1,5

• $N_1(\lambda P) = \sum_k |(\lambda P)^{(k)}(0)| = \sum_k |\lambda| \ |P^{(k)}(0)| = |\lambda| N_1(P).$ 0,5

• $N_1(P+Q) = \sum_k |(P+Q)^{(k)}(0)| \leq \sum_k |P^{(k)}(0)| + \sum_k |Q^{(k)}(0)| = N_1(P) + N_1(Q).$ 0,5

• $N_2(P) = 0 \Rightarrow P(x) = 0 \ \forall x \in ]-1,1[ \Rightarrow$ infinité de 0 $\Rightarrow P = 0.$ 1

• $N_2(\lambda P) \ldots$

• $N_2(P+Q) \ldots$ } 0,5

2) $P_n(X) = \frac{1}{n} X^n$, $P_n^{(k)}(X) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n} X^{n-k}$, $P_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k < n \\ (n-1)! & k = n. \end{cases}$ 2

$N_1(P_n) = (n-1)! \to +\infty \Rightarrow (P_n)$ ne conv. pas pour $N_1$.

$N_2(P_n) = \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow P_n \to 0$ pour $N_2$. 1

3) Pas équivalentes 0,5

$\boxed{8}$

4. a) $\bigcup_{B \subset U} B \subset U$ trivial.

Inversement, si $x \in U \Rightarrow \exists B(x,r) \subset U \Rightarrow x \in \bigcup_{B\subset U} B$. On a montré $\subset$ et $\supset$. 1,5

b) Plusieurs méthodes : $D = \{a + \lambda v \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$

caract. séquentielle : si $x_n = a + \lambda_n v \in D$ et $\to x \in \mathbb{R}$ (normes équiv. !!)

alors $a_i + \lambda_n v_i \to x_i$

$\Rightarrow$ $(\lambda_n)$ converge vers $\lambda$

$\Rightarrow$ $x_n \to x = a + \lambda v$.

ou alors : base adaptée à $D$ : $\begin{pmatrix} a+\lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ + caract. séq. 3

$\boxed{4,5}$

---

c) Vu en cours pour $n=2$.
On peut reprendre l'idée :

$A_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/n \end{pmatrix}$ est inversible et $\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne l'est pas. Donc pas fermé. 1,5

Regardons le complémentaire : l'ens. des mat. non inv.

$(A_n)$ suite de matrices tq $\det A_n = 0$.

$A_n = (a_{ij}^n) \to A = (a_{ij})$ donc $a_{ij}^n \to a_{ij}$ (choix de norme)

Mais $\det A_n = \Sigma \Pi a_{ij}^n \to \Sigma \Pi a_{ij} = \det A \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A$ non inversible.

L'ens. des mat. non inversibles est fermé. L'ens. des mat. inv. est ouvert. 3,5

$\boxed{5}$