Analyse IV

D.S. 1

27/02/2018

1. Sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^n$ on définit pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} .$$

Montrez que cela définit une norme sur E.

2. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels) et on définit pour tout $A \in E$

$$N(A) = \sup\{\|Ax\| \ ; \ x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\} .$$

a) Montrez que cela définit une norme sur E.

b) Montrez que pour tout $A \in E$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|Ax\| \leq N(A) \ \|x\| .$$

c) Montrez que N vérifie $N(AB) \leq N(A)\, N(B)$, pour tout $A, B \in E$.

3. Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| P^{(k)}(0) \right| , \qquad N_2(P) = \sup_{t \in]-1,1[} |P(t)| .$$

a) Montrez que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Etudiez, pour l'une et l'autre norme, la convergence de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$P_n(X) = \frac{1}{n} X^n .$$

c) Ces normes sont elles équivalentes ?

4. a) Montrez que tout ouvert U est l'union de toutes les boules ouvertes qu'il contient.

b) Montrez que dans $\mathbb{R}^d$ toute droite est un fermé.

c) Dans l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices inversibles est-il un fermé ? Est-il un ouvert ?