Analyse IV

Stéphane Attal

7 mars 2018

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

1.1 Normes

Dans tout ce qui suit on se fixe un corps $\mathbb{K}$ qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on se fixe aussi un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1 *On appelle* norme *sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les 3 propriétés suivantes :*

- *Séparation : $\forall x \in E$, on a $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.*
- *Homogénéïté : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) : |\lambda| \; N(x)$.*
- *Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$, on a $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.*

Les normes sur E sont le plus souvent notées $N(\cdot)$, $\|\cdot\|$ ou $|\cdot|$.

On dit dans ce cas que E est un espace vectoriel normé*.*

Proposition 1.1.1 *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E.*

i) Si F est un sous-espace de E alors la restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme sur F.

ii) $\forall x \in E$, on a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

iii) $\forall x \in E$, on a $\|-x\| = \|x\|$.

iv) $\forall x, y \in E$, on a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Toutes ces démonstrations sont très faciles et laissées aux étudiants comme exercice.

Nous commençons tout de suite avec des exemples qui servent souvent.

Définition 2 *On a ici $E = \mathbb{K}^n$. Pour tout $p \in [1, +\infty[$ on définit la* norme *L^p sur E comme suit : pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ on pose*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} .$$

Montrons que ce sont effectivement des normes. La séparation et l'homogénéité sont faciles, je vous les laisse. Ce qui est difficile c'est l'inégalité triangulaire.

Théorème 1.1.2
i) Inégalité de Holder : Pour $p \in]1, +\infty[$, on considère q tel que $1/p + 1/q = 1$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k| \; |v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q \right)^{1/q} .$$

Dans le cas $p = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k| \; |v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k| \right) \left(\sup_{k=1,\ldots,n} |v_k| \right) .$$

i) Inégalité de Minkovski : Pour $p \in [1, +\infty[$ on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} .$$

Démonstration
i) Si $u, v > 0$ alors par concavité de log on a

$$\log \left(\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \right) \geq \frac{\log(u^p)}{p} + \frac{\log(u^q)}{q} = \log(uv) ,$$

donc

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} .$$

En appliquant cela aux $|u_k| \; |v_k|$ et en sommant, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k| \; |v_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|^p}{p} + \frac{|v_k|^q}{q} .$$

En particulier

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p}} \, \frac{|v_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{1/q}} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{|u_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^p\right)^{1/p}}\right)^p}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{|v_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|v_k|^q\right)^{1/q}}\right)^q}{q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,.
\end{aligned}$$

Ce qui donne l'égalité annoncée.
ii) On a, en posant $q = p/(p-1)$ de sorte que $1/p + 1/q = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p &\leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) \, |x_k + y_k|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} .
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\|x+y\|_p^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \frac{\|x+y\|_p^p}{\|x+y\|_p} \,,$$

d'où le résultat annoncé. □

Parmi ces normes on utilise beaucoup les cas $p = 1$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

et $p = 2$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} .$$

On utilise aussi souvent la norme suivante

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_k| \; ; \; k = 1, \ldots, n\} \,.$$

Il est facile de vérifier que cette dernière est bien une norme.

Définition 3 *A toute norme est associée une* distance d *sur* E *définie par*

$$d(x,y) = \|x-y\| \; .$$

Cette application vérifie les axiomes d'une distance, i.e.
i) Séparation : $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
ii) Symétrie : $d(x,y) = d(y,x)$.
iii) Inégalité triangulaire : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
Elle vérifie de plus une propriété qui est spécifique aux distances issues d'une norme :
iv) Invariance par translation : $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

Les propriétés annoncées ci-dessus sont vraiment toutes faciles à vérifier.

1.1.2 Boules

Définition 4 *Dans un espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|)$, *on appelle*
– boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ *l'ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in E\,;\; \|x-a\| < r\}\,.$$

– boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ *l'ensemble*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in E\,;\; \|x-a\| \leq r\}\,.$$

– sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ *l'ensemble*

$$S(a,r) = \{x \in E\,;\; \|x-a\| = r\}\,.$$

Regardons dans $\mathbb{R}^2$ les boules unités fermées pour les normes 1, 2 et ∞. Pour la norme ℓ^1 :

$$|x| + |y| \leq 1\,,$$

c'est un losange (dessin).

Pour la norme ℓ^2 :

$$x^2 + y^2 \leq 1\,,$$

c'est un disque (dessin).

Pour la norme ℓ^∞ :

$$\max |x|\,, |y| \leq 1\,,$$

c'est un carré (dessin).

Définition 5 *Une partie $A \subset E$ est* bornée *si elle est incluse dans une boule $\overline{B}(0,r)$, c'est à dire s'il existe $r \geq 0$ tel que $\|x\| \leq r$ pour tout $x \in A$.*

On dit qu'une fonction $f : X \to E$ à valeurs dans E est bornée *si l'image de f est une partie bornée de E, i.e. il existe $r \geq 0$ tel que $\|f(x)\| \leq r$ pour tout $x \in X$.*

On dit qu'une suite (u_n) à valeurs dans E est bornée *si l'ensemble de ses valeurs est un ensemble borné, i.e. s'il existe $r \geq 0$ tel que $\|u_n\| \leq r$ pour tout n.*

1.1.3 Exemples d'E.V.N.

Théorème 1.1.3 *Tout espace vectoriel de dimension fini peut être muni d'une norme.*

Démonstration On choisit une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, espace vectoriel de dimension fini. Pour tout $x \in E$, on regarde les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de x dans la base en question. On applique une des normes l^p de $\mathbb{K}^n$ à ces coordonnées.

En résumé, on pose

$$N(x) = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p \,,$$

où $x = \sum_{i=1}^n x_i \, e_i$. On vérifie facilement que c'est une norme. □

On se concentre maintenant sur quelques normes d'espaces de dimension infini. Les espaces typiques de dimension infinie que l'on considère sont des espaces de fonctions :

– $E = C^0(I; \mathbb{K})$, l'espace des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$,

– $E = \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, l'espace des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$,

– $E = L^p(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de puissance p intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx < \infty \,.$$

etc.

Les normes usuelles que l'on considère sur ces espaces sont

– la *norme uniforme* :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ ; \ x \in I\} \,,$$

– les normes L^p

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} .$$

Notez les cas particuliers qui reviennent souvent

$$\|f\|_1 = \left(\int_I |f(x)| \, dx \right)$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

On ne démontre pas que ce sont des normes ; certains cas sont faciles, les autres sont très proches de la démonstration pour la norme ℓ^p.

A partir d'espaces vectoriels normés on définit une norme sur l'espace produit.

Définition 6 *On considère des E.V.N. sur $\mathbb{K}$: $(E_1, N_1), \ldots, (E_n, N_n)$. On construit l'espace produit $E = \prod_{i=1}^n E_i$, qui est lui même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel défini comme suit :*

- $E = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \, ; \; x_i \in E_i, \forall i\}$
- $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, $\lambda \, x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

On le munit d'une norme

$$N(x) = \max\{N_i(x_i) \, ; \; i = 1, \ldots, n\} .$$

Il est facile de vérifier que c'est effectivement une norme sur E.

1.2 Suites dans les E.V.N.

Définition 7 *On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On dit que cette suite* converge *vers une limite $l \in E$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \, ; \; n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - l\| \leq \varepsilon \, .$$

Proposition 1.2.1 *Si (u_n) est une suite dans $(E, \|\cdot\|)$ qui converge vers $l \in E$, alors la suite $(\|u_n\|)$ converge vers $\|l\|$ dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration Par l'inégalité triangulaire renversée

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \, .$$

on a

$$|\|u_n\| - \|l\|| \leq \|u_n - l\| \, .$$

On conclut facilement. □

On a les propriétés usuelles sur les limites.

Proposition 1.2.2 *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites dans E qui convergent respectivement vers l, k, alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda l + \mu k$.*

La démonstration est identique à celle dans $\mathbb{R}$.

Par contre il faut faire attention que pour le produit $(u_n v_n)$ cela n'a pas forcément de sens : il n'y a pas de produit naturel sur les espaces vectoriels. Et même si c'est le cas (un e.v. avec un produit) il faut que la norme se comporte bien vis à vis du produit. Nous ne développons pas ici ces questions.

1.3 Equivalences de normes

Définition 8 *Soit E un espace vectoriel normé avec deux normes N_1 et N_2. On dit que N_2* domine *N_1 si il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$$

pour tout $x \in E$.

(Notez bien qu'ici α est "universel", il ne dépend pas de x).

On a vu en T.D. des exemples sur $E = \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$
$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_2 \ ...$$

Sur $C([0,1])$ aussi, on a par exemple

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\ dx \leq \sup_x |f(x)| \int_0^1 1\, dx = \|f\|_\infty\ .$$

Par contre, sur $C([0,1])$, la $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas dominée par la $\|\cdot\|_1$. En effet, si on prend la fonction $f(x) = x^n$ sur $[0,1]$, on a $\|f\|_1 = 1/(n+1)$ et $\|f\|_\infty = 1$, donc il n'existe aucun $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\|f\|_\infty \leq \alpha\ \|f\|_1$$

pour TOUT $f \in C([0,1])$.

Définition 9 *On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont* équivalentes *si elles se dominent mutuellement. Autrement dit, s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que*

$$\alpha\, N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta\, N_2(x)$$

pour tout $x \in E$.

Ou bien de manière équivalente s'il existe $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\gamma\, N_1(x) \leq N_2(x) \leq \lambda\, N_2(x)$$

pour tout $x \in E$.

On a vu en T.D. que sur $\mathbb{R}^n$ les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Par contre, sur $C([0,1])$ les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 1.3.1 *L'équivalence de normes est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.*

Théorème 1.3.2 *Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini toutes les normes sont équivalentes.*

La démonstration de ce théorème est relativement longue et difficile, elle est hors programme.

En dimension infinie, il existe des normes équivalentes, mais il existe aussi des normes non équivalentes (comme on a vu plus haut).

Lorsque que l'on a affaire à des normes équivalentes, il y a beaucoup de notions qui sont les mêmes d'une norme à l'autre :

– être borné ne change pas d'une norme équivalente à une autre

– le fait qu'une suite soit convergente, ainsi que la valeur de sa limite, ne changent pas avec des normes équivalentes.

Par contre, avec des normes non équivalentes, il peut tout se produire : une suite converge pour une norme et diverge pour l'autre, ou bien même elles convergent toutes deux mais vers des limites différentes.

1.4 Convergence dans les espaces produits

Théorème 1.4.1 *Soit $E = \prod_{i=1}^k E_i$ un produit d'E.V.N. $(E_1, N_1), \ldots, (E_k, N_k)$, muni de sa norme produit comme définie précédemment. Une suite $(u(n))$ d'éléments de E s'écrit*

$$u(n) = (u_1(n), \ldots, u_k(n))$$

en coordonnées. On a alors équivalence entre *i) La suite $(u(n))$ converge dans E.*

ii) Chacune des suites $u_1, \ldots, u_k$ converge.

Dans ce cas on a de plus

$$\lim u(n) = (\lim u_1(n), \ldots, \lim u_k(n))\,.$$

Démonstration

D'abord montrons que i) implique ii). Soit $l = (l_1, \ldots, l_k)$ la limite de $(u(n))$. En particulier on a

$$\|u(n) - l\|_E \to 0$$

c'est à dire

$$\max_i N_i(u_i(n) - l_i) \to 0\,.$$

Donc chaque $N_i(u_i(n) - l_i)$ tend vers 0. Ce qui prouve ii).

Montrons que ii) implique i). Supposons que chaque $(u_i(n))$ converge dans E_i vers l_i. Posons $l = (l_1, \ldots, l_k) \in E$. On a

$$\|u(n) - l\|_E = \max_i N_i(u_i(n) - l_i) \leq \sum_{i=1}^{k} N_i(u_i(n) - l_i) \to 0\,.$$

Cela montre i).

Au passage on a aussi montré le dernier point. $\square$

La principale application de ce théorème est le cas $E = \mathbb{K}^n$.

Théorème 1.4.2 *Soit $E = \mathbb{K}^n$, muni d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque. Une suite $(u(n))$ d'éléments de E s'écrit*

$$u(n) = (u_1(n), \ldots, u_k(n))$$

en coordonnées. On a alors équivalence entre

i) La suite $(u(n))$ converge dans E.

ii) Chacune des suites $u_1, \ldots, u_k$ converge.

Dans ce cas on a de plus

$$\lim u(n) = (\lim u_1(n), \ldots, \lim u_k(n))\,.$$

1.5 Séries dans les E.V.N.

Définition 10 *On se donne une suite (u_n) à valeurs dans un E.V.N. $(E, \|\cdot\|)$. On appelle* série de terme général (u_n) *la suite*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \,, \; n \in \mathbb{N} \,.$$

On dit que cette série converge *si la suite (S_n) converge dans E pour la norme $\|\cdot\|$. (i.e. s'il existe $S \in E$ tel que $\|S_n - S\| \to 0$.*

Par exemple, on peut considérer une suite de fonctions : $f_n(x) = \alpha_n \, x^n$ et se poser la question de la convergence de la série $\sum_n \alpha_n x^n$, pour quelle norme ?

Définition 11 *On dit que la série $\sum u_n$ est* absolument convergente *si la série (scalaire !)*

$$\sum_n \|u_n\|$$

converge dans $\mathbb{K}$.

Théorème 1.5.1 *Si E est de dimension finie et une série $\sum u_n$ est absolument convergente dans E alors elle est convergente dans E.*

Démonstration La suite (u_n) s'écrit dans une base de E

$$u_n = \sum_{i=1}^{d} u_n^i \, e_i \,.$$

On prend sur E la norme

$$\|u\| = \max_i \left| u^i \right| \,.$$

On a $|u_n^i| \leq \max_j |u_n^j|$, donc

$$\sum_n \left| u_n^i \right| \leq \sum_n \|u_n\| \,.$$

Par théorème de comparaison, on en déduit que la série $\sum_n |u_n^i|$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$, donc convergente. On peut ensuite par exemple regarder la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{i=1}^{k} S_n^i \, e_i \,.$$

Chacune des sommes partielles S_n^i converge dans $\mathbb{K}$, donc S_n converge. $\square$

Chapitre 2

Topologie

Dans toute la suite on se donne un E.V.N. $(E, \|\cdot\|)$ sur $\mathbb{K}$. Toutes les objets et notions que l'on aborde ici sont les mêmes si on change la norme pour une norme équivalente. Par contre si on change pour une norme non équivalente, ils peuvent être alors très différents.

2.1 Ouverts

Définition 12 *On appelle* voisinage *de $a \in E$, toute partie $V \subset E$ telle que*

$$\exists \alpha > 0\,;\ B(a,\alpha) \subset V.$$

Proposition 2.1.1
1) Dans $\mathbb{R}$, un ensemble V est un voisinage de a si et seulement si

$$\exists \alpha > 0\,;\ ]a-\alpha, a+\alpha[\subset V\,.$$

2) Si V est un voisinage de a et $V \subset W$ alors W est un voisinage de a.
3) Si $V_1, \dots, V_n$ sont des voisinages de a, alors $\cap_{i=1}^n V_i$ est un voisinage de a.

Toutes les démonstrations sont faciles et laissées comme exercice.

Notez que 3) n'est plus vrai avec une intersection d'une infinité de voisinages. Par exemple

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}\,,$$

or les $]-1/n, 1/n[$ sont des voisinages de 0, mais pas $\{0\}$.

Définition 13 *Une partie U de E est un* ouvert de E *si elle est voisinage de chacun de ses points. Autrement dit*

$$\forall a \in U, \exists \alpha > 0\,;\ B(a,\alpha) \subset U\,.$$

Notez que $\emptyset$ et E sont toujours des ouverts de E.

Dans $\mathbb{R}$ les ensembles $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$ sont des ouverts.

Théorème 2.1.2 *Toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration Soit U_i, $i \in I$ des ouverts de E et $U = \cup_{i\in I} U_i$. Soit $a \in U$, alors il existe $i \in I$ tel que $a \in U_i$. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a,\alpha) \subset U_i$. En particulier $B(a,\alpha) \subset U$. $\square$

Théorème 2.1.3 *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration Soit U_i, $i = 1, \ldots, n$ des ouverts de E et $U = \cap_{i=1}^n U_i$. Soit $a \in U$, alors pour tout $i = 1, \ldots, n$ on a $a \in U_i$. Donc il existe $\alpha_i > 0$ tel que $B(a,\alpha_i) \subset U_i$. Si on pose $\alpha = \min\{\alpha_i\,;\ i = 1, \ldots, n\}$, alors $\alpha > 0$ et $B(a,\alpha) \subset B(a,\alpha_i)$ pour tout i, donc $B(a,\alpha) \subset U$. $\square$

Ca ne marche plus avec les intersections infinies ; il suffit de reprendre l'exemple

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}\,,$$

pour avoir un contre-exemple.

Proposition 2.1.4 *Si $U_1, \ldots, U_p$ sont des parties ouvertes de $E_1, \ldots, E_p$ respectivement, alors $U = U_1 \times \ldots \times U_p$ est une partie ouverte de $E = E_1 \times \ldots \times E_p$.*

Démonstration Nous allons en profiter pour préciser les boules dans les espaces produits.

Lemme 2.1.5 *Sur $E = E_1 \times \ldots \times E_p$, si $a = (a_1, \ldots, a_p)$ et $r \geq 0$, alors*

$$B_E(a,r) = \prod_{i=1}^p B_{E_i}(a_i, r)\,.$$

Prouvons le lemme. On a $x \in B(a,r)$ si et seulement si $\|x-a\|_E \leq r$, i.e. $\max_i \|x_i - a_i\|_{E_i} \leq r$, mais cela est équivalent à $\|x - a_i\|_{E_i} \leq r$ pour tout i. D'où le résultat.

Revenons à la preuve de la proposition. Si $a \in U = U_1 \times \ldots \times U_p$, alors pour tout i on a $a_i \in U_i$, donc il existe r_i tel que $B(a_i, r_i) \subset U_i$. Prenons $r = \min_i r_i$, alors $r > 0$ et $B(a_i, r) \subset U_i$ pour tout i et donc $B(a,r) \subset U$. Ce qui prouve que U est ouvert. $\square$

2.2 Fermés

Définition 14 *Une partie F d'un E.V.N. $(E, \|\cdot\|)$ est un* fermé *si son complémentaire est ouvert.*

Notez que $\emptyset$ et E sont des fermés. Il existe donc des parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées.

Dans $\mathbb{R}$, les ensemble suivants sont fermés : $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$.

Un ensemble comme $]a, b]$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Théorème 2.2.1

Toute intersection (finie ou infinie) de fermés est un fermé.

Toute union finie de fermés est un fermé.

La preuve est immédiate par passage au complémentaire et par les propriétés des ouverts.

Théorème 2.2.2 (Caractérisation séquentielle des fermés) *Soit F une partie fermée de E. On a équivalence entre les assertions suivantes.*

i) F est fermé.

ii) Pour tout suite $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to a \in E$, alors $a \in F$.

Démonstration

i) implique ii). Par contraposée, considérons une suite (x_n) qui converge vers $a \in E \setminus F$, alors si $E \setminus F$ était un ouvert, il existerait $B(a, r) \subset E \setminus F$. Mais dans $B(a, r)$ il y a forcément des éléments de la suite (x_n) (il y en a même une infinité : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N};\ n \geq N \Rightarrow \|x_n - a\| \leq \varepsilon$). Ce qui contredit $(x_n) \subset F$. Donc $E \setminus F$ n'est pas ouvert et F n'est pas fermé.

ii) implique i). On suppose que ii) est réalisé. On veut montrer que $E \setminus F$ est ouvert. Si $E \setminus F$n'est pas ouvert alors il existe $a \in E \setminus F$ tel que toute boule $B(a, r)$ (avec $r > 0$) intersecte F. Prenons $r = 1/n$ et notons $x_n \in F$ tel que $x_n \in B(a, 1/n)$. La suite (x_n) ainsi construite est dans F, elle converge vers a car $\|x_n - a\| \leq 1/n$, donc on devrait avoir $a \in F$. Contradictoire. $\square$

Les singletons sont des fermés. Les ensembles finis aussi. Les boules fermées sont fermées et les boules ouvertes sont ouvertes. Les sphères sont fermées (car leur complémentaire est l'union de deux ouverts).

Proposition 2.2.3 *Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des parties fermées de $E_1, \ldots, E_p$ respectivement, alors $F = F_1 \times \ldots \times F_p$ est une partie fermée de $E = E_1 \times \ldots \times E_p$.*

Démonstration On va le montrer par la caractérisation séquentielle. Si (x_n) est une suite dans E, elle s'écrit $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^p)$ dans le produit cartesien. Si elle converge vers $a = (a_1, \ldots, a_p)$, alors chaque suite $(x_n^i)_n$ converge vers a_i.

Comme chaque F_i est fermé, cela signifie que $a_i \in F_i$ et donc $a \in F$. On a montré que F est fermé. □

2.3 Intérieur, adhérence, frontière

Définition 15 *Soit A une partie de E. On appelle* intérieur *de A, noté $\mathring{A}$, l'union de tous les ouverts inclus dans A. C'est donc un ouvert aussi.*

Proposition 2.3.1 *L'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A. L'intérieur de A est aussi l'union de toutes les boules ouvertes incluses dans A. Un ensemble A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.*

Facile, laissé en exercice.

Définition 16 *On appelle* adhérence *ou* fermeture *de A l'intersection de tous les fermés qui contiennent A. C'est donc un fermé contenant A. On le note $\overline{A}$.*

Proposition 2.3.2

1) L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

2) L'adhérence de A est l'ensemble de toutes les limites de suites (x_n) à valeurs dans A.

3) Un point $a \in E$ est dans l'adhérence de A si et seulement si tous ses voisinages intersectent A.

4) Un ensemble A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Démonstration

1) C'est immédiat par la définition de $\overline{A}$.

4) est évident.

3) Soit $a \in \overline{A}$ et $B(a, r)$ un voisinage de a. Si $B(a, r)$ n'intersecte pas A, alors $\overline{A} \setminus B(a, r)$ est un fermé qui contient A. Mais il est clairement strictement inclus dans $\overline{A}$ ce qui contredit que $\overline{A}$ est le plus petit. Donc $B(a, r)$ intersecte toujours A.

Inversement, si $a \in E$ a tous ses voisinages qui intersectent A, alors on peut construire une suite (x_n) dans A qui converge vers a. Donc a sera dans

tout fermé qui contient A, par la caractérisation séquentielle des fermés. Donc a est dans $\overline{A}$.
2) Si a est limite d'une suite (x_n) dans A, alors tout voisinage de a contient des x_n et donc intersecte A. Donc $a \in \overline{A}$.

Inversement si $a \in \overline{A}$, alors tous ses voisinages intersectent A, donc on a déjà vu comment construire une suite dans A qui converge vers a. □

Proposition 2.3.3

$$\complement\left(\overline{A}\right) = \left(\complement A\right)^{\circ}$$
$$\complement\left(\mathring{A}\right) = \overline{\left(\complement A\right)}$$

Démonstration Comme $A \subset \overline{A}$ alors $\complement\overline{A} \subset \complement A$. Mais $\complement\overline{A}$ est un ouvert, il est inclus dans A, donc il est inclus dans $(\complement A)^{\circ}$. Inversement si $x \in (\complement A)^{\circ}$, alors il existe $B(x,r) \subset \complement A$. Alors forcement x n'est pas dans $\overline{A}$ car sinon $B(x,r)$ intersecterait A. Donc $x \in \complement\overline{A}$. On a montré l'égalité des deux ensembles.

L'autre égalité est maintenant facile. □

Définition 17 *L'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$ est appelé* frontière *de A. Il est noté δA. C'est un fermé.*

Notez que $A \cup \delta A = \overline{A}$ et que $A \setminus \delta A = \mathring{A}$.

Théorème 2.3.4 (Caractérisation séquentielle des points adhérents) *Soit X une partie non vide de E et $a \in E$. On a équivalence entre :*

i) a est un point adhérent de X.

ii) Il existe une suite $(x_n) \subset X$ telle $\lim x_n = a$.

Démonstration Si a est adhérent à X, alors $B(a, 1/n)$ intersecte X. Soit $x_n \in B(a, 1/n) \cap X$, alors $\|a - x_n\| \leq 1/n$ et du coup $\lim x_n = a$.

Inversement, si ii) est vérifié et si on considère un voisinage $B(a,r)$ de a, on sait par le raisonnement habituel sur les limites que $B(a,r)$ contient une infinité de x_n, donc $B(a,r)$ intersecte X. On a montré que a est adhérent à X. □

2.4 Limites et continuité

Définition 18 *Pour les fonctions $f : E \to F$, les définitions de limites sont les mêmes que sur $\mathbb{R}$ mais avec les normes adéquats. Par exemple, on dit que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\,;\ \|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon\,.$$

On a alors, de la même façon que dans $\mathbb{R}$ les théorèmes usuels d'unicité de la limite, les opérations sur la limite (addition, multiplication par un scalaire, composition des limites). On a aussi la caractérisation séquentielle de la limite (même preuve que dans $\mathbb{R}$).

Théorème 2.4.1 *On a équivalence entre*
i) $\lim_{x\to a} f(x) = l$
ii) Pour toute suite (x_n) *telle que* $\lim x_n = a$*, on a* $\lim f(x_n) = l$*.*

Dans les E.V.N. de dimension finie, on a, comme pour les suites, la caractérisation coordonnée par coordonnée de la limite des fonctions.

Définition 19 *Soit* $f : E \to F$*, avec* F *de dimension finie. Si on choisit une base* $\{e_1, \ldots, e_p\}$ *de* F*, on peut définir les* fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ *associées à* f*, par*

$$f(x) = f_1(x)\, e_1 + \ldots + f_p(x)\, e_p\,.$$

Théorème 2.4.2 *Soit* $f : E \to F$*, avec* F *de dimension finie. On a équivalence entre*
i) $\lim_{x\to a} f(x) = l$
ii) Pour tout $i = 1, \ldots, p$*,* $\lim_{x\to a} f_i(x) = l_i$*.*

Définition 20 *Soit* $f : E \to F$*, on dit que* f *est* continue au point $a \in E$*, si* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$*.*

On dit que f *est* continue*, tout court, si elle est continue en tout point* $a \in E$*.*

On a encore une fois toutes les propriétés usuelles : addition, multiplication scalaire, composition. Si F est de dimension finie, on a la caractérisation coordonnée par coordonnée de la continuité, etc.

Par contre, on a une caractérisation magnifique de la continuité en termes d'ouverts et de fermés.

Théorème 2.4.3 *Soit* $f : E \to F$*, il y a équivalence entre*
i) f *est continue.*
ii) L'image réciproque $f^{-1}(U)$ *de tout ouvert* U *de* F *est un ouvert de* E*.*
iii) L'image réciproque $f^{-1}(V)$ *de tout fermé* V *de* F *est un fermé de* E*.*

Démonstration

i) implique ii) : Soit $a \in f^{-1}(U)$, i.e. $f(a) \in U$. Comme U est un ouvert, il existe $B(a, \varepsilon) \subset U$. Mais f est continue, donc il existe $\delta > 0$ tel que $\|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $x \in B(a, \delta)$ on a $f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset U$, i.e. $x \in f^{-1}(U)$. On a montré que $f^{-1}(U)$ est ouvert.

ii) implique i) : Soit $a \in F$, considérons l'ouvert $U = B(f(a), \varepsilon)$. On sait que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E et qu'il contient a. Donc il contient une boule $B(a, \delta)$. On a $B(a, \delta) \subset f^{-1}(U)$, ce qui veut dire exactement

$$\forall x \in E\,;\ \|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon\,.$$

C'est la définition de la continuité.

L'équivalence entre ii) et iii) est facile, car le f^{-1} d'un complémentaire est le complémentaire du f^{-1}. □

2.5 Densité

Définition 21 *Une partie F d'un E.V.N. E est dite* dense dans E *si* $\overline{F} = E$.

Théorème 2.5.1 *Soit F une partie de E, les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) F est dense dans E

ii) Pour tout $x \in E$, pour tout $r > 0$, la boule $B(x, r)$ intersecte F.

iii) Pour tout $x \in E$ il existe $(a_n) \subset F$ telle que $\lim a_n = x$.

Ce théorème se démontre très facilement avec tout ce qu'on a vu concernant les adhérences. Laissé en exercice.

On connaît bien la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Plus intéressant, la partie $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$. Montrons le. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, posons $A_p = A + 1/p\, I_n$. Les p tels que A_p est de déterminant nul sont en nombre fini, car ce sont exactement les p pour lesquels $1/p$ est une valeur propre de A. Mais les valeurs propres de A sont en nombre fini. Donc pour tout p assez grand $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$. Cela prouve la densité annoncée.

Théorème 2.5.2 *Si f et g sont deux fonctions continues sur E et qui coïncident sur une partie F dense dans E, alors f et g sont égales sur E.*

2.6 Compacts

Définition 22 *On dit qu'une partie K de E est* compacte *si toute suite dans K admet une sous-suite convergente dans X.*

Théorème 2.6.1 *Toute partie compacte de E est fermée et bornée.*

Démonstration Soit K une partie compacte de E. Montrons qu'elle est fermée. Soit (k_n) une suite dans K qui converge vers $k \in E$. On sait que (k_n) admet une sous-suite $(k_{\phi(n)})$ convergente vers un $\widehat{k} \in K$. Mais comme la suite (k_n) est convergente, toutes ses sous-suites ont la même limite. on a montré que $k \in K$ et donc que K est fermé.

Montrons maintenant que K est borné. Par l'absurde, si K est non bornée il existe une suite (k_n) dans K telle que $\|k_n\| \geq n$ pour tout n. Clairement cette suite n'admet pas de sous-suite convergente. □

Théorème 2.6.2 *Toute partie fermée d'un compact est compacte*

Démonstration Soit F fermé inclus dans K compact. Soit (f_n) une suite dans F, c'est une suite dans K donc elle admet une sous-suite $(f_{\phi(n)})$ convergente vers un $f \in K$. La sous-suite est dans F fermé, donc sa limite aussi. On a trouvé une sous-suite de (f_n) convergente dans F. On a montré que F est compact. □

Théorème 2.6.3

i) L'intersection de deux compacts est un compact.

ii) L'union de deux compacts est un compact.

iii) Le produit cartésien de deux compacts est un compact.

Démonstration

i) C'est un fermé inclus dans un compact.

ii) Si on prend une suite dans l'union, il y a une infinité" de termes dans l'un ou l'autre. On peut donc extraire une sous-suite convergente.

iii) Dans le produit, une suite k_n, $n \in \mathbb{N}$ s'écrit (x_n, y_n). On extrait une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$ dans le premier compact. On considère la suite $k_{\phi(n)} = (x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)})$. On extrait une sous-sous-suite convergente $y_{\psi(\phi(n))}$ dans le deuxième compact. On obtient ainsi une sous-suite convergente $k_{\psi(\phi(n))}$. □

Théorème 2.6.4 *En dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées bornées.*

Démonstration Soit F une partie fermée bornée de E, E.V.N. de dimension finie, disons d. On se fixe une base de E et on écrit les coordonnées des éléments de E dans cette base. Comme F est bornée, i.e. $\|f\| \leq M \ \forall f \in F$, ses coordonnées sont aussi bornées par M. Donc une suite (f_n) dans f est une suite dans le compact $[-M, M]^d$. Elle admet une sous-suite convergente $(f_{\phi(n)})$ dans ce compact. Mais comme F est fermé, cette limite est aussi dans F. □

Corollaire 2.6.5 *En dimension finie, les boules fermées sont compactes.*

En dimension infinie ce n'est plus vrai. Voici un contre-exemple. Prenons l'espace $E = \mathcal{B}([0,1])$ des fonctions bornées sur $[0,1]$, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ ; \ x \in [0,1]\}$. Pour tout $x \in [0,1]$ on considère la fonction f_x donnée par

$$f_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = x \\ 0 & \text{si } t \neq x\,. \end{cases}$$

Chacune de ces fonctions est de norme 1. Elles sont donc toutes dans la boule fermée $\overline{B(0,1)}$. On a aussi $\|f_x - f_y\| = 1$, si $x \neq y$. Donc si on prend une suite (f_{x_n}) de telles fonctions, elles sont dans la boule fermée mais elles sont toutes à distance 1 l'une de l'autre. On ne risque pas de trouver une sous-suite convergente ! Donc la boule fermée $\overline{B(0,1)}$ n'est pas compacte, alors qu'elle est fermée et bornée.

Corollaire 2.6.6 *En dimension finie toute suite bornée admet une valeur d'adhérence (i.e. une limite de sous-suite).*

Démonstration C'est une suite dans une boule fermée en dimension finie, donc dans un compact. □

En dimension infinie, si on prend la une suite (f_{x_n}) comme définie ci-dessus, c'est une suite bornée, sans sous-suite convergente.

Proposition 2.6.7 *Une suite dans un compact est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration Si une suite est convergente, toutes ses sous-suites ont la même limite. Donc la suite a une unique valeur d'adhérence.

Inversement, supposons que (u_n) n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, disons l. Si (u_n) ne converge pas vers l, ça veut dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ avec $|u_n - l| \geq \varepsilon$.

Il existe donc une suite infinie $(u_{\phi(n)})$ de termes de la suite qui sont hors de la boule $B(l, \varepsilon)$. Cette sous-suite est dans un compact par hypothèse, elle admet donc une valeur d'adhérence m qui vérifie forcément $\|m - l\| \geq \varepsilon$. Ca ferait une autre valeur d'adhérence pour (u_n) ce qui est contraire à l'hypothèse. $\square$

On obtient ainsi un très joli théorème.

Théorème 2.6.8 *Tout sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

Démonstration Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, soit (u_n) une suite dans F qui converge vers $l \in E$. Comme la suite converge, elle est bornée. Donc la suite (u_n) est dans une boule fermée de F, donc dans un compact. Elle admet donc une valeur d'adhérence dans ce compact, donc dans F. Mais cette valeur d'adhérence ne peut être que l. On a montré que $l \in F$ et que donc F est fermé. $\square$

Une petite application : distance d'un point à un fermé, en dimension finie. Soit F un fermé de E un e.v.n. de dim finie. Soit $x \in E$, on pose $d(x, F) = \inf\{\|y - x\| \ ; \ y \in F\}$. Nous allons montrer que cet inf est atteint, i.e. que c'est un min.

Par la caractérisation du sup, il existe une suite (y_n) dans F telle que $\|y_n - x\|$ tend vers $d(x, F)$. En particulier la suite (y_n) est bornée (car $\|y_n\| \leq \|x\| + \|y_n - x\|$ et que la suite $(\|y_n - x\|)$ est bornée). C'est une suite bornée dans un espace de dimension finie, donc elle admet une sous-suite convergente $(y_{\phi(n)})$, de limite y qui appartient à F car il est fermé.

On a $\|y - x\| = \lim \left\|y_{\phi(n)} - x\right\| = \lim \|y_n - x\| = d(x, F)$. La distance est atteinte.

On regarde maintenant des propriétés qui lient continuité et compacts.

Théorème 2.6.9 *L'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Démonstration Soit $f : E \to F$ une application continue. Soit $K \subset E$ un compact. On veut montrer que $f(K)$ est compact. Soit (y_n) une suite dans $f(K)$, il existe une suite (x_n) dans K telle que $y_n = f(x_n)$. La suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergente, de limite $x \in K$. Mais comme f est continue on a $\lim y_{\phi(n)} = \lim f(x_{\phi(n)}) = f(x)$. On a montré que (y_n) admet une sous-suite convergente. On a montré que $f(K)$ est compact. $\square$

Théorème 2.6.10 *Toute fonction continue sur un compact atteint son* sup *et son* inf.

Démonstration L'image de K compact non vide par f continue est un compact non vide $f(K)$. Soit $M = \sup f(K)$ et soit (y_n) une suite dans $f(K)$ telle que $\lim y_n = M$. Alors $y_n = f(x_n)$ avec $x_n \in K$. Ensuite, on a déjà vu l'argument : il existe une sou-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers x et par continuité on a $f(x) = \lim f(x_{\phi(n)}) = M$. □

Une petite application très utile : distance d'un point à un compact, en dimension quelconque. Soit K un compact de E un e.v.n. Soit $x \in E$, on pose $d(x, K) = \inf\{\|y - x\| \ ; \ y \in K\}$. Nous allons montrer que cet inf est atteint, i.e. que c'est un min.

La fonction $y \mapsto \|y - x\|$ est continue de K dans $\mathbb{R}$ donc elle atteint son inf.

Chapitre 3

Séries de fonctions

3.1 Différents types de convergence

3.2 Régularité des séries de fonctions

3.3 Séries entières

Chapitre 4

Calcul différentiel

4.1 Continuité

4.2 Différentielle