Analyse IV

Stéphane Attal

6 février 2018

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

1.1 Normes

Dans tout ce qui suit on se fixe un corps $\mathbb{K}$ qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on se fixe aussi un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1 *On appelle* norme *sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les 3 propriétés suivantes :*

- *Séparation : $\forall x \in E$, on a $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.*
- *Homogénéïté : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) : |\lambda|\ N(x)$.*
- *Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$, on a $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.*

Les normes sur E sont le plus souvent notées $N(\cdot)$, $\|\cdot\|$ ou $|\cdot|$.

On dit dans ce cas que E est un espace vectoriel normé*.*

Proposition 1.1.1 *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E.*

i) Si F est un sous-espace de E alors la restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme sur F.

ii) $\forall x \in E$, on a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

iii) $\forall x \in E$, on a $\|-x\| = \|x\|$.

iv) $\forall x, y \in E$, on a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Toutes ces démonstrations sont très faciles et laissées aux étudiants comme exercice.

Nous commençons tout de suite avec des exemples qui servent souvent.

Définition 2 *On a ici $E = \mathbb{K}^n$. Pour tout $p \in [1, +\infty[$ on définit la* norme L^p *sur E comme suit : pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ on pose*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} .$$

Montrons que ce sont effectivement des normes. La séparation et l'homogénéité sont faciles, je vous les laisse. Ce qui est difficile c'est l'inégalité triangulaire.

Théorème 1.1.2
i) Inégalité de Holder : Pour $p \in]1, +\infty[$, on considère q tel que $1/p + 1/q = 1$. On a alors

$$\sum_{k=1}^n |u_k| \, |v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |u_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |v_k|^q \right)^{1/q} .$$

Dans le cas $p = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^n |u_k| \, |v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |u_k| \right) \left(\sup_{k=1,\dots,n} |v_k| \right) .$$

i) Inégalité de Minkovski : Pour $p \in [1, +\infty[$ on a

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p} .$$

Démonstration
i) Si $u, v > 0$ alors par concavité de log on a

$$\log \left(\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \right) \geq \frac{\log(u^p)}{p} + \frac{\log(u^q)}{q} = \log(uv) \, ,$$

donc

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \, .$$

En appliquant cela aux $|u_k| \, |v_k|$ et en sommant, on obtient

$$\sum_{k=1}^n |u_k| \, |v_k| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|u_k|^p}{p} + \frac{|v_k|^q}{q} \, .$$

En particulier

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{1/p}} \frac{|v_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^q\right)^{1/q}} \leq \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{|u_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^p\right)^{1/p}}\right)^p}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{|v_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|v_k|^q\right)^{1/q}}\right)^q}{q} \\
&\quad = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.
\end{aligned}$$

Ce qui donne l'égalité annoncée.
ii) On a, en posant $q = p/(p-1)$ de sorte que $1/p + 1/q = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p &\leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)\ |x_k + y_k|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\|x + y\|_p^p \leq \Big(\|x\|_p + \|y\|_p\Big) \frac{\|x + y\|_p^p}{\|x + y\|_p}\,,$$

d'où le résultat annoncé. □

Parmi ces normes on utilise beaucoup les cas $p = 1$

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

et $p = 2$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

On utilise aussi souvent la norme suivante

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_k|\ ;\ k = 1, \ldots, n\}\,.$$

Il est facile de vérifier que cette dernière est bien une norme.

Définition 3 *A toute norme est associée une* distance d *sur* E *définie par*

$$d(x,y) = \|x-y\| \ .$$

Cette application vérifie les axiomes d'une distance, i.e.
i) Séparation : $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.
ii) Symétrie : $d(x,y)=d(y,x)$.
iii) Inégalité triangulaire : $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.
Elle vérifie de plus une propriété qui est spécifique aux distances issues d'une norme :
iv) Invariance par translation : $d(x+z,y+z)=d(x,y)$.

Les propriétés annoncées ci-dessus sont vraiment toutes faciles à vérifier.

1.1.2 Boules

Définition 4 *Dans un espace vectoriel normé* $(E,\|\cdot\|)$*, on appelle*
– boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ *l'ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in E\,;\ \|x-a\| < r\}\,.$$

– boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ *l'ensemble*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in E\,;\ \|x-a\| \leq r\}\,.$$

– sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$ *l'ensemble*

$$S(a,r) = \{x \in E\,;\ \|x-a\| = r\}\,.$$

Regardons dans $\mathbb{R}^2$ les boules unités fermées pour les normes 1, 2 et ∞. Pour la norme ℓ^1 :

$$|x|+|y| \leq 1\,,$$

c'est un losange (dessin).
Pour la norme ℓ^2 :

$$x^2+y^2 \leq 1\,,$$

c'est un disque (dessin).
Pour la norme ℓ^∞ :

$$\max|x|\,,|y| \leq 1\,,$$

c'est un carré (dessin).

Définition 5 *Une partie $A \subset E$ est* bornée *si elle est incluse dans une boule $\overline{B}(0,r)$, c'est à dire s'il existe $r \geq 0$ tel que $\|x\| \leq r$ pour tout $x \in A$.*

On dit qu'une fonction $f : X \to E$ à valeurs dans E est bornée *si l'image de f est une partie bornée de E, i.e. il existe $r \geq 0$ tel que $\|f(x)\| \leq r$ pour tout $x \in X$.*

On dit qu'une suite (u_n) à valeurs dans E est bornée *si l'ensemble de ses valeurs est un ensemble borné, i.e. s'il existe $r \geq 0$ tel que $\|u_n\| \leq r$ pour tout n.*

1.1.3 Exemples d'E.V.N.

Théorème 1.1.3 *Tout espace vectoriel de dimension fini peut être muni d'une norme.*

Démonstration On choisit une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, espace vectoriel de dimension fini. Pour tout $x \in E$, on regarde les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de x dans la base en question. On applique une des normes l^p de $\mathbb{K}^n$ à ces coordonnées.

En résumé, on pose

$$N(x) = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p ,$$

où $x = \sum_{i=1}^n x_i\, e_i$. On vérifie facilement que c'est une norme. □

On se concentre maintenant sur quelques normes d'espaces de dimension infini. Les espaces typiques de dimension infinie que l'on considère sont des espaces de fonctions :

– $E = C^0(I; \mathbb{K})$, l'espace des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$,

– $E = \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, l'espace des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$,

– $E = L^p(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de puissance p intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx < \infty .$$

etc.

Les normes usuelles que l'on considère sur ces espaces sont

– la *norme uniforme* :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ ; \ x \in I\} ,$$

– les normes L^p

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p \ dx \right)^{1/p} .$$

Notez les cas particuliers qui reviennent souvent

$$\|f\|_1 = \left(\int_I |f(x)| \ dx \right)$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f(x)|^2 \ dx \right)^{1/2} .$$

On ne démontre pas que ce sont des normes ; certains cas sont faciles, les autres sont très proches de la démonstration pour la norme ℓ^p.

A partir d'espaces vectoriels normés on définit une norme sur l'espace produit.

Définition 6 *On considère des E.V.N. sur $\mathbb{K}$: $(E_1, N_1), \ldots, (E_n, N_n)$. On construit l'espace produit $E = \prod_{i=1}^n E_i$, qui est lui même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel défini comme suit :*

- $E = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \, ; \; x_i \in E_i, \forall i\}$
- $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, $\lambda \, x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

On le munit d'une norme

$$N(x) = \max\{N_i(x_i) \, ; \; i = 1, \ldots, n\} .$$

Il est facile de vérifier que c'est effectivement une norme sur E.

1.2 Suites dans les E.V.N.

Définition 7 *On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On dit que cette suite* converge *vers une limite $l \in E$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \, ; \; n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - l\| \leq \varepsilon \, .$$

Proposition 1.2.1 *Si (u_n) est une suite dans $(E, \|\cdot\|)$ qui converge vers $l \in E$, alors la suite $(\|u_n\|)$ converge vers $\|l\|$ dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration Par l'inégalité triangulaire renversée

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \, .$$

on a

$$|\|u_n\| - \|l\|| \leq \|u_n - l\| \, .$$

On conclut facilement. □

On a les propriétés usuelles sur les limites.

Proposition 1.2.2 *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites dans E qui convergent respectivement vers l, k, alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda l + \mu k$.*

La démonstration est identique à celle dans $\mathbb{R}$.

Par contre il faut faire attention que pour le produit $(u_n v_n)$ cela n'a pas forcément de sens : il n'y a pas de produit naturel sur les espaces vectoriels. Et même si c'est le cas (un e.v. avec un produit) il faut que la norme se comporte bien vis à vis du produit. Nous ne développons pas ici ces questions.

1.3 Equivalences de normes

Définition 8 *Soit E un espace vectoriel normé avec deux normes N_1 et N_2. On dit que N_2* domine *N_1 si il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$$

pour tout $x \in E$.

(Notez bien qu'ici α est "universel", il ne dépend pas de x).

On a vu en T.D. des exemples sur $E = \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$
$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_2\ ...$$

Sur $C([0,1])$ aussi, on a par exemple

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\ dx \leq \sup_x |f(x)| \int_0^1 1\, dx = \|f\|_\infty\ .$$

Par contre, sur $C([0,1])$, la $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas dominée par la $\|\cdot\|_1$. En effet, si on prend la fonction $f(x) = x^n$ sur $[0,1]$, on a $\|f\|_1 = 1/(n+1)$ et $\|f\|_\infty = 1$, donc il n'existe aucun $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\|f\|_\infty \leq \alpha\ \|f\|_1$$

pour TOUT $f \in C([0,1])$.

Définition 9 *On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont* équivalentes *si elles se dominent mutuellement. Autrement dit, s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que*

$$\alpha\, N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta\, N_2(x)$$

pour tout $x \in E$.

Ou bien de manière équivalente s'il existe $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\gamma\, N_1(x) \leq N_2(x) \leq \lambda\, N_2(x)$$

pour tout $x \in E$.

On a vu en T.D. que sur $\mathbb{R}^n$ les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Par contre, sur $C([0,1])$ les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 1.3.1 *L'équivalence de normes est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.*

Théorème 1.3.2 *Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini toutes les normes sont équivalentes.*

La démonstration de ce théorème est relativement longue et difficile, elle est hors programme.

En dimension infinie, il existe des normes équivalentes, mais il existe aussi des normes non équivalentes (comme on a vu plus haut).

Lorsque que l'on a affaire à des normes équivalentes, il y a beaucoup de notions qui sont les mêmes d'une norme à l'autre :

– être borné ne change pas d'une norme équivalente à une autre

– le fait qu'une suite soit convergente, ainsi que la valeur de sa limite, ne changent pas avec des normes équivalentes.

Par contre, avec des normes non équivalentes, il peut tout se produire : une suite converge pour une norme et diverge pour l'autre, ou bien même elles convergent toutes deux mais vers des limites différentes.

1.4 Convergence dans les espaces produits

Théorème 1.4.1 *Soit $E = \prod_{i=1}^{k} E_i$ un produit d'E.V.N. $(E_1, N_1), \ldots, (E_k, N_k)$, muni de sa norme produit comme définie précédemment. Une suite $(u(n))$ d'éléments de E s'écrit*

$$u(n) = (u_1(n), \ldots, u_k(n))$$

en coordonnées. On a alors équivalence entre *i) La suite $(u(n))$ converge dans E.*

ii) Chacune des suites $u_1, \ldots, u_k$ converge.

Dans ce cas on a de plus

$$\lim u(n) = (\lim u_1(n), \ldots, \lim u_k(n)) \, .$$

Démonstration

D'abord montrons que i) implique ii). Soit $l = (l_1, \ldots, l_k)$ la limite de $(u(n))$. En particulier on a

$$\|u(n) - l\|_E \to 0$$

c'est à dire

$$\max_i N_i(u_i(n) - l_i) \to 0 \, .$$

Donc chaque $N_i(u_i(n) - l_i)$ tend vers 0. Ce qui prouve ii).

Montrons que ii) implique i). Supposons que chaque $(u_i(n))$ converge dans E_i vers l_i. Posons $l = (l_1, \ldots, l_k) \in E$. On a

$$\|u(n) - l\|_E = \max_i N_i(u_i(n) - l_i) \leq \sum_{i=1}^{k} N_i(u_i(n) - l_i) \to 0 \, .$$

Cela montre i).

Au passage on a aussi montré le dernier point. $\square$

La principale application de ce théorème est le cas $E = \mathbb{K}^n$.

Théorème 1.4.2 *Soit $E = \mathbb{K}^n$, muni d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque. Une suite $(u(n))$ d'éléments de E s'écrit*

$$u(n) = (u_1(n), \ldots, u_k(n))$$

en coordonnées. On a alors équivalence entre

i) La suite $(u(n))$ converge dans E.

ii) Chacune des suites $u_1, \ldots, u_k$ converge.

Dans ce cas on a de plus

$$\lim u(n) = (\lim u_1(n), \ldots, \lim u_k(n)) \, .$$

1.5 Séries dans les E.V.N.

Définition 10 *On se donne une suite (u_n) à valeurs dans un E.V.N. $(E, \|\cdot\|)$. On appelle* série de terme général (u_n) *la suite*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\,, \ n \in \mathbb{N}\,.$$

On dit que cette série converge *si la suite (S_n) converge dans E pour la norme $\|\cdot\|$. (i.e. s'il existe $S \in E$ tel que $\|S_n - S\| \to 0$.*

Par exemple, on peut considérer une suite de fonctions : $f_n(x) = \alpha_n\, x^n$ et se poser la question de la convergence de la série $\sum_n \alpha_n x^n$, pour quelle norme ?

Définition 11 *On dit que la série $\sum u_n$ est* absolument convergente *si la série (scalaire !)*

$$\sum_n \|u_n\|$$

converge dans $\mathbb{K}$.

Théorème 1.5.1 *Si E est de dimension finie et une série $\sum u_n$ est absolument convergente dans E alors elle est convergente dans E.*

Démonstration La suite (u_n) s'écrit dans une base de E

$$u_n = \sum_{i=1}^{d} u_n^i\, e_i\,.$$

On prend sur E la norme

$$\|u\| = \max_i \left|u^i\right|\,.$$

On a $|u_n^i| \leq \max_j |u_n^j|$, donc

$$\sum_n \left|u_n^i\right| \leq \sum_n \|u_n\|\,.$$

Par théorème de comparaison, on en déduit que la série $\sum_n |u_n^i|$ est absolument convergente dans $\mathbb{K}$, donc convergente. On peut ensuite par exemple regarder la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{i=1}^{k} S_n^i\, e_i\,.$$

Chacune des sommes partielles S_n^i converge dans $\mathbb{K}$, donc S_n converge. □

Chapitre 2

Topologie

Dans toute la suite on se donne un E.V.N. $(E, \|\cdot\|)$ sur $\mathbb{K}$. Toutes les objets et notions que l'on aborde ici sont les mêmes si on change la norme pour une norme équivalente. Par contre si on change pour une norme non équivalente, ils peuvent être alors très différents.

2.1 Ouverts

Définition 12 *On appelle* voisinage *de $a \in E$, toute partie $V \subset E$ telle que*

$$\exists \alpha > 0\,;\ B(a, \alpha) \subset V.$$

Proposition 2.1.1
1) Dans $\mathbb{R}$, un ensemble V est un voisinage de a si et seulement si

$$\exists \alpha > 0\,;\ ]a - \alpha, a + \alpha[\subset V\,.$$

2) Si V est un voisinage de a et $V \subset W$ alors W est un voisinage de a.
3) Si $V_1, \ldots, V_n$ sont des voisinages de a, alors $\cap_{i=1}^n V_i$ est un voisinage de a.

Toutes les démonstrations sont faciles et laissées comme exercice.

Notez que 3) n'est plus vrai avec une intersection d'une infinité de voisinages. Par exemple

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}\,,$$

or les $]-1/n, 1/n[$ sont des voisinages de 0, mais pas $\{0\}$.

Définition 13 *Une partie U de E est un* ouvert de E *si elle est voisinage de chacun de ses points. Autrement dit*

$$\forall a \in U, \exists \alpha > 0\,;\ B(a, \alpha) \subset U\,.$$

Notez que $\emptyset$ et E sont toujours des ouverts de E.

Dans $\mathbb{R}$ les ensembles $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$ sont des ouverts.

Théorème 2.1.2 *Toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration Soit U_i, $i \in I$ des ouverts de E et $U = \cup_{i\in I} U_i$. Soit $a \in U$, alors il existe $i \in I$ tel que $a \in U_i$. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a,\alpha) \subset U_i$. En particulier $B(a,\alpha) \subset U$. □

Théorème 2.1.3 *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration Soit U_i, $i = 1,\dots,n$ des ouverts de E et $U = \cap_{i=1}^n U_i$. Soit $a \in U$, alors pour tout $i = 1,\dots,n$ on a $a \in U_i$. Donc il existe $\alpha_i > 0$ tel que $B(a,\alpha_i) \subset U_i$. Si on pose $\alpha = \min\{\alpha_i\,;\ i = 1,\dots,n\}$, alors $\alpha > 0$ et $B(a,\alpha) \subset B(a,\alpha_i)$ pour tout i, donc $B(a,\alpha) \subset U$. □

Ca ne marche plus avec les intersections infinies ; il suffit de reprendre l'exemple

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[= \{0\}\,,$$

pour avoir un contre-exemple.

Proposition 2.1.4 *Si $U_1,\dots,U_p$ sont des parties ouvertes de $E_1,\dots,E_p$ respectivement, alors $U = U_1 \times \ldots \times U_p$ est une partie ouverte de $E = E_1 \times \ldots \times E_p$.*

Démonstration Nous allons en profiter pour préciser les boules dans les espaces produits.

Lemme 2.1.5 *Sur $E = E_1 \times \ldots \times E_p$, si $a = (a_1,\dots,a_p)$ et $r \geq 0$, alors*

$$B_E(a,r) = \prod_{i=1}^{p} B_{E_i}(a_i,r)\,.$$

Prouvons le lemme. On a $x \in B(a,r)$ si et seulement si $\|x-a\|_E \leq r$, i.e. $\max_i \|x_i - a_i\|_{E_i} \leq r$, mais cela est équivalent à $\|x - a_i\|_{E_i} \leq r$ pour tout i. D'où le résultat.

Revenons à la preuve de la proposition. Si $a \in U = U_1 \times \ldots \times U_p$, alors pour tout i on a $a_i \in U_i$, donc il existe r_i tel que $B(a_i,r_i) \subset U_i$. Prenons $r = \min_i r_i$, alors $r > 0$ et $B(a_i,r) \subset U_i$ pour tout i et donc $B(a,r) \subset U$. Ce qui prouve que U est ouvert. □

2.2 Fermés

Définition 14 *Une partie F d'un E.V.N. $(E, \|\cdot\|)$ est un* fermé *si son complémentaire est ouvert.*

Notez que $\emptyset$ et E sont des fermés. Il existe donc des parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées.

Dans $\mathbb{R}$, les ensemble suivants sont fermés : $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$.

Un ensemble comme $]a, b]$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Théorème 2.2.1
Toute intersection (finie ou infinie) de fermés est un fermé.
Toute union finie de fermés est un fermé.

La preuve est immédiate par passage au complémentaire et par les propriétés des ouverts.

Théorème 2.2.2 (Caractérisation séquentielle des fermés) *Soit F une partie fermée de E. On a équivalence entre les assertions suivantes.*
i) F est fermé.
ii) Pour tout suite $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to a \in E$, alors $a \in F$.

Démonstration
i) implique ii). Par contraposée, considérons une suite (x_n) qui converge vers $a \in E \setminus F$, alors si $E \setminus F$ était un ouvert, il existerait $B(a, r) \subset E \setminus F$. Mais dans $B(a, r)$ il y a forcément des éléments de la suite (x_n) (il y en a même une infinité : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N};\ n \geq N \Rightarrow \|x_n - a\| \leq \varepsilon$). Ce qui contredit $(x_n) \subset F$. Donc $E \setminus F$ n'est pas ouvert et F n'est pas fermé.
ii) implique i). On suppose que ii) est réalisé. On veut montrer que $E \setminus F$ est ouvert. Si $E \setminus F$n'est pas ouvert alors il existe $a \in E \setminus F$ tel que toute boule $B(a, r)$ (avec $r > 0$) intersecte F. Prenons $r = 1/n$ et notons $x_n \in F$ tel que $x_n \in B(a, 1/n)$. La suite (x_n) ainsi construite est dans F, elle converge vers a car $\|x_n - a\| \leq 1/n$, donc on devrait avoir $a \in F$. Contradictoire. $\square$

Les singletons sont des fermés. Les ensembles finis aussi. Les boules fermées sont fermées et les boules ouvertes sont ouvertes. Les sphères sont fermées (car leur complémentaire est l'union de deux ouverts).

Proposition 2.2.3 *Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des parties fermées de $E_1, \ldots, E_p$ respectivement, alors $F = F_1 \times \ldots \times F_p$ est une partie fermée de $E = E_1 \times \ldots \times E_p$.*

Démonstration On va le montrer par la caractérisation séquentielle. Si (x_n) est une suite dans E, elle s'écrit $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p)$ dans le produit cartesien. Si elle converge vers $a = (a_1, \dots, a_p)$, alors chaque suite $(x_n^i)_n$ converge vers a_i.

Comme chaque F_i est fermé, cela signifie que $a_i \in F_i$ et donc $a \in F$. On a montré que F est fermé. $\square$

2.3 Intérieur, adhérence, frontière

Définition 15 *Soit A une partie de E. On appelle* intérieur *de A, noté $\mathring{A}$, l'union de tous les ouverts inclus dans A. C'est donc un ouvert aussi.*

Proposition 2.3.1 *L'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A. L'intérieur de A est aussi l'union de toutes les boules ouvertes incluses dans A. Un ensemble A est ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.*

Facile, laissé en exercice.

Définition 16 *On appelle* adhérence *ou* fermeture *de A l'intersection de tous les fermés qui contiennent A. C'est donc un fermé contenant A. On le note $\overline{A}$.*

Proposition 2.3.2

1) L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

2) L'adhérence de A est l'ensemble de toutes les limites de suites (x_n) à valeurs dans A.

3) Un point $a \in E$ est dans l'adhérence de A si et seulement si tous ses voisinages intersectent A.

4) Un ensemble A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Démonstration

1) C'est immédiat par la définition de $\overline{A}$.

4) est évident.

3) Soit $a \in \overline{A}$ et $B(a,r)$ un voisinage de a. Si $B(a,r)$ n'intersecte pas A, alors $\overline{A} \setminus B(a,r)$ est un fermé qui contient A. Mais il est clairement strictement inclus dans $\overline{A}$ ce qui contredit que $\overline{A}$ est le plus petit. Donc $B(a,r)$ intersecte toujours A.

Inversement, si $a \in E$ a tous ses voisinages qui intersectent A, alors on peut construire une suite (x_n) dans A qui converge vers a. Donc a sera dans

tout fermé qui contient A, par la caractérisation séquentielle des fermés. Donc a est dans $\overline{A}$.
2) Si a est limite d'une suite (x_n) dans A, alors tout voisinage de a contient des x_n et donc intersecte A. Donc $a \in \overline{A}$.

Inversement si $a \in \overline{A}$, alors tous ses voisinages intersectent A, donc on a déjà vu comment construire une suite dans A qui converge vers a. □

Proposition 2.3.3

$$\complement\left(\overline{A}\right) = \left(\complement A\right)^{\circ}$$
$$\complement\left(\mathring{A}\right) = \overline{\left(\complement A\right)}$$

Démonstration Comme $A \subset \overline{A}$ alors $\complement\overline{A} \subset \complement A$. Mais $\complement\overline{A}$ est un ouvert, il est inclus dans A, donc il est inclus dans $(\complement A)^{\circ}$. Inversement si $x \in (\complement A)^{\circ}$, alors il existe $B(x,r) \subset \complement A$. Alors forcement x n'est pas dans $\overline{A}$ car sinon $B(x,r)$ intersecterait A. Donc $x \in \complement\overline{A}$. On a montré l'égalité des deux ensembles.

L'autre égalité est maintenant facile. □

Définition 17 *L'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$ est appelé* frontière *de A. Il est noté δA. C'est un fermé.*

Notez que $A \cup \delta A = \overline{A}$ et que $A \setminus \delta A = \mathring{A}$.

Chapitre 3

Séries de fonctions

3.1 Différents types de convergence

3.2 Régularité des séries de fonctions

3.3 Séries entières

Chapitre 4

Calcul différentiel

4.1 Continuité

4.2 Différentielle