Fiche 3

Exercice 1 (Premiers pas en topologie) Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E. Montrer que l'intérieur de A est égal à A si et seulement si A est ouvert.

Exercice 2 (Normes équivalentes et les topologies qu'elles induisent) Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes équivalentes N_1 et N_2.

1. Montrer que $A \subset E$ est une partie ouverte de E par rapport à N_1 si et seulement si A est ouvert par rapport à N_2.
2. Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in E$ par rapport à N_1 si et seulement s'il en est de même par rapport à N_2.

Exercice 3 (Ensembles finis) Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé non nul.

1. Montrer que toute partie finie de E est fermée et d'intérieur vide.
2. Trouver une partie infinie de E qui est fermée et d'intérieur vide.

Exercice 4 (Propriétés topologiques de parties de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) Déterminer les propriétés topologiques des ensembles suivants. Sont-ils ouverts, fermés, compacts ? Déterminer leurs adhérences.

Dans $\mathbb{R}$ Un intervalle fermé ; un intervalle ouvert ; $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Dans $\mathbb{R}^2$ $\{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0\}$.

Dans $\mathbb{R}^3$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\ ,\ z < 0\}$.

Exercice 5 (La densité des rationnels) On munit $\mathbb{R}$ de la norme valeur absolue. Quelle est l'adhérence $\mathbb{Q}$ dans la topologie induite par cette norme.

Exercice 6 (Fermés, Compacts)

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E. On définit $A+B = \{a+b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A + B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A + B$ l'est aussi.
3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A + B$ n'en est pas un.

Exercice 7 (Compacts) Soit $(E, \|\ .\|)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$ une partie compacte. Montrer que toute partie fermée de E incluse dans X est elle-même compacte.