Fiche 4

Exercice 1 (La continuité par recollements)

1. Soit $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés avec $E = A \cup B$. On supposera A et B fermés. Soit $f : E \to F$ telle que la restriction de f à A et à B soient continues. Montrer alors que f est continue.
2. Montrer que la même conclusion reste vraie si on remplace la condition d'être fermé par celle d'être ouvert.
3. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 1$ si $x = 0$ n'est pas continue en 0 et en déduire que les hypothèses sur A et B dans les parties précédentes sont essentielles.
4. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ and $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (La continuité et la densité)
Soient $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \to F$ surjective continue. Montrer que si $A \subset E$ est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans F.

Exercice 3 (La "diagonale")
Soient $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Montrer que $\Delta = \{(y, y),\, y \in F\}$ est un fermé de $F \times F$.
2. Soient $f,\, g : E \to F$ continues. Montrer que
$$A = \{x \in E;\, f(x) = g(x)\}$$
est un fermé de E.
3. Montrer que si $f,\, g$ coincident sur une partie A dense dans E alors $f = g$ sur E.

Exercice 4 (La continuité et la compacité) Soient $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $f : E \longrightarrow F$ une application continue de E vers F, et $A \subset E$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ de E dans $\mathbb{R}$ est continue.
2. Montrer que si A est compact, alors $f(A)$ est borné.
3. Montrer que le point précédent est faux si A n'est pas compact.

Exercice 5 (La continuité des applications linéaires) Soient (E, N_1) et (F, N_2) deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. f est continue ;
2. f est continue en 0 ;
3. f est bornée sur la boule unité.

Déduire de cette équivalence que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est continue.

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit $\| \, \|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E.

1. Montrer que $x \in E \longmapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E.

2. En déduire que f est continue.

Exercice 7 (Fonctions Lipschitziennes) Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \to F$. On dit que f est Lipschitizienne s'il existe $K > 0$ tel que l'on ait pour tout $x_1,\, x_2 \in E$,

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_F \leq K\|x_1 - x_2\|_E.$$

1. Montrer que la composée de deux apllications Lipschitziennes est Lipschitzienne.
2. Montrer qu'une application Lipschitzienne est uniformément continue mais la réciproque n'est pas vraie (considérer sur $[0, \frac{1}{2}]$ la fonction $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$).
3. Soit A une partie non vide de E. On considère l'application distance à A, $d_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad d_A(x) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}. \tag{1}$$

   a. Montrer que d_A est continue.
   b. On suppose désormais que A est une partie compacte de E. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.