Solutions d'exercices (suite)

Retour sur le plan euclidien

On suppose E euclidien de dimension 2 dans lequel on fixe une bon $B = (u, u')$. On a vu en fiche 4 (cf aussi le cours) que la matrice dans la base B d'un endomorphisme orthogonal de déterminant $+1$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} =_{\text{not.}} R_\theta$$

et de déterminant -1, s'écrit

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix} =_{\text{not.}} S_\theta$$

pour un réel $\theta \in R$.

R_θ est la matrice d'une rotation, disons r, d'angle θ: sur une figure, on voit que la bon (u, u') pivote sur la bon $(cos(\theta)u + sin(\theta)u', -sin(\theta)u + cos(\theta)u')$.

S_θ est la matrice de la composée de la rotation r d'angle θ avec la réflexion s définie par $s(u) = u, s(u') = -u'$: en effet, $r \circ s(u) = r(u)$ et $r \circ s(u') = r(-u') = -r(u')$.

On va montrer que S_θ est la matrice d'une réflexion: pour commencer on observe que $S_\theta^2 = I_2$, c'est donc la matrice d' une symétrie orthogonale. Comme S_θ n'est ni I_2 ni $-I_2$, son polynôme minimal est $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Dans une bon de vecteurs propres, la matrice de $r \circ s$ s'écrit donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour décrire cette réflexion $r \circ s$, il faut localiser sa droite fixe (son sous-espace propre pour $+1$).

Il y a 2 cas immédiats: si $\theta = 0$, $S_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et u est fixe. Si $\theta = \pi$, $S_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et u' est fixe.

Pour le cas général, on peut résoudre l'équation $S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, mais on peut aussi observer ceci: pour toute symétrie σ et tout vecteur $x \in E$, $x_+ = \frac{x+\sigma(x)}{2}$ satisfait à $\sigma(x_+) = x_+$. Ici, pour $\theta \neq \pi$, $\sigma = r \circ s$ et $x = u$:

$$\frac{u + r \circ s(u)}{2} = \frac{1 + cos(\theta)}{2} u + \frac{sin(\theta)}{2} u' = cos(\frac{\theta}{2})\,(cos(\frac{\theta}{2})u + sin(\frac{\theta}{2})u')$$

et S_θ est la matrice de la réflexion de droite fixe $Vect(cos(\frac{\theta}{2})u + sin(\frac{\theta}{2})u')$.

Attention: cette description des endomorphismes orthogonaux du plan est importante. En dimension 2, le déterminant permet de les classer: rotations (si $det = +1$) et réflexions (si $det = -1$).

Exercice 2, fiche 5

Il s'agit d'écrire les matrices orthogonales suivantes

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

comme produits de matrices de réflexions.
$det(A) = -1$, c'est donc une réflexion et l'écriture $A = A$ est une décomposition en réflexions!
$det(B) = 1$, c'est donc une rotation. Prenons une matrice S de réflexion plane, par exemple $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; on a $det(SR) = det(S)det(R) = -1$, par la discussion qui précède SR est la matrice d'une réflexion et l'écriture $R = S\,(SR)$ est une décomposition en produit de deux réflexions. (Observez qu'une telle écriture n'est pas unique.)

Le cas de dimension 3 est plus difficile:
Méthode 1: on suit ici la preuve du théorème de décomposition en réflexions du cours: voici l'argument utile: si $f \in O(E)$ n'est pas l'identité, il existe $x \in E$ tel que $x - f(x) \neq 0$. On écrit $E = Vect(x - f(x)) \oplus Vect(x - f(x))^{\perp}$, on considère la réflexion σ de plan fixe $Vect(x - f(x))^{\perp}$ et on calcule $\sigma \circ f$. On observe alors que $\sigma \circ f(x) = x$ et donc $\sigma \circ f(Vect(x)^{\perp}) \subset Vect(x)^{\perp}$: faisons-le pour l'endomorphisme f de matrice C dans la base canonique (e_1, e_2, e_3): pour $x = e_1$, on a $e_1 - f(e_1) = e_1 + e_3$ et $Vect(e_1 + e_3)^{\perp} = Vect(e_2, e_1 - e_3)$. On a donc

$$\sigma(e_1 + e_3) = -e_1 - e_3,\ \sigma(e_2) = e_2, \sigma(e_1 - e_3) = e_1 - e_3,$$

ce qui donne

$$\sigma(e_1) = -e_3,\ \sigma(e_2) = e_2,\ \sigma(e_3) = -e_1.$$

La matrice de $\sigma \circ f$ dans la base canonique s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_{-\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

C'est donc la matrice d'une rotation d'axe e_1 et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. En écrivant $R_{-\frac{\pi}{4}} = S(SR)$ (comme on l'a fait pour B) et en multipliant à gauche par la matrice de σ, on obtient une écriture de C comme produit de matrices de réflexions:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & SR_{-\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

Méthode 2: on peut donner une autre solution basée sur le déterminant. Ici, $det(C) = -1$. Par la classification des endomorphismes orthogonaux en dimension 3, C est la matrice dans la base canonique de la composée d'une réflexion s et d'une rotation r dans le plan fixe de la réflexion. C admet la valeur propre -1 et on a

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons $u = \frac{1}{\sqrt{(5-2\sqrt{2})}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = (u, v, w)$ une bon de premier vecteur u. Le plan fixe de la réflexion est alors $Vect(v, w)$. Si P est la matrice de passage de la base canonique à B on a

$$C = P \begin{pmatrix} -1 & \\ & R \end{pmatrix} {}^tP = P \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & R \end{pmatrix} {}^tP$$

où R est la matrice d'une rotation plane. En écrivant $R = S(SR)$ comme plus haut et en insérant $I_3 =^t PP$, il vient

$$C = (P\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}{}^tP)\,(P\begin{pmatrix} 1 & \\ & S \end{pmatrix}{}^tP)\,(P\begin{pmatrix} 1 & \\ & SR \end{pmatrix}{}^tP)$$

qui est une écriture de C en produit de matrices de réflexions.

Exercice 3, fiche 5

Pour cet exercice, il faut avoir à l'esprit que si r est une rotation de R^3 autour de l'axe $D = Vect(u)$, alors, dans toute bon $B = (u, v, w)$ de R^3 (dont le premier vecteur dirige D), la matrice de r s'écrit

$$Mat_B(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}.$$

1. Il est utile de faire une figure: l'axe de la rotation r est porté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le plan P orhogonal à l'axe est $Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. La matrice de r dans la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & R_{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Une figure est utile: l'axe de la rotation r est porté par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le plan P orthogonal à l'axe est $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. La matrice de r dans la bon $(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & R_\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d'où on obtient, en revenant à la base canonique,

$$r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}r(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}r(-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de r dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque: pour obtenir cette matrice on peut aussi utiliser la formule de changement de base: La matrice de changement de base

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale et

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Une figure est utile: l'axe de r est porté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan P orthogonal à l'axe est $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$. En appliquant Gram-Schmidt à cette base de P, on obtient une bon

$$(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$$

dans laquelle la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & R_{\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En revenant à la base canonique (par changement de base), la matrice de cette rotation s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La méthode que l'on vient de décrire a l'avantage de s'appliquer à toute situation. Toutefois, dans les cas simples, il y a une autre manière de faire, plus immédiate: on peut lire sur la figure l'image par r d'une base (de premier vecteur sur l'axe de r) et ensuite par changement de base se ramener à la base canonique. Voici comment faire: sur la figure, on observe que le plan P intersecte le cube suivant un hexagone régulier et on sait que l'angle de deux sommets consécutifs d'un hexagone est $\frac{\pi}{3}$.
On a donc

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad r \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En revenant à la base canonique on retrouve la matrice obtenue ci-dessus.

4. Une figure est utile. Soit s la réflexion dont le plan fixe est le plan P d'équation $y + z = 0$. On a

$$P = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad P^{\perp} = Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

On a déjà rencontré cette réflexion (cf l'autre fichier); je répète donc: par définition, s est l'identité sur P et $s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. On a donc

$$s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}s(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \; s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}s(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

et la matrice de s dans la base canonique est $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Exercice 4, fiche 5

On dit que deux endomorphismes f et g de l'espace E *commutent* si $f \circ g = g \circ f$.

1. On se donne une bon $B = (v_1, \dots, v_n)$ de E et il s'agit de montrer que si l'endomorphisme f commute avec toutes les symétries orthogonales, alors sa matrice dans la base B est diagonale.

Pour voir cela, on se sert de n réflexions orthogonales particulières $s_j, 1 \leq j \leq n$, définies par leurs valeurs sur la base par

$$s_j(v_j) = -v_j, \quad s_j(v_l) = v_l \text{ si } l \neq j.$$

Par hypothèse sur f, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $s_j \circ f = f \circ s_j$; en particulier,

$$s_j \circ f(v_j) = f \circ s_j(v_j) = -f(v_j),$$

i.e. $f(v_j)$ est un vecteur propre de valeur propre -1 de s_j. Ce sous-espace propre étant $Vect(v_j)$ il existe un réel $t_j \in R$ tel que $f(v_j) = t_j v_j$; ceci étant vrai pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix}t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n\end{pmatrix}.$$

2. Il s'agit de montrer que les coefficients diagonaux de $Mat_B(f)$ sont égaux.

Pour cela, on fait commuter f avec les symétries orthogonales $s_{ij}, i < j$ définies en posant

$$s_{ij}(v_i) = v_j, \; s_{ij}(v_j) = v_i, \; s_{ij}(v_l) = v_l \text{ si } l \neq i, j.$$

(s_{ij} échange v_i et v_j.)
On a d'une part $s_{ij} \circ f(v_i) = s_{ij}(t_i v_i) = t_i v_j$ et d'autre part $f \circ s_{ij}(v_i) = f(v_j) = t_j v_j$. La condition $s_{ij} \circ f = f \circ s_{ij}$ donne $t_i v_j = t_j v_j$, i.e. pour tout $i < j, t_i = t_j$.

3. Par le cours, tout endomorphisme orthogonal est la composée de réflexions. Dès lors, un endomorphisme orthogonal f est central ssi f commute avec les réflexions.

Par ce qui précède, f est alors une homothétie, i.e. $f = t\, id_E$ avec $t \in R$. f étant orthogonale, on a $t^2 = 1$, i.e. $f = \pm id_E$.

$dim(E) = 2$: $SO(E)$ est l'ensemble des rotations planes de matrices R_θ dans une bon de E. On a déjà vu que

$$\forall \theta, \psi \in R, \quad R_\theta \circ R_\psi = R_{\theta+\psi} = R_\psi \circ R_\theta,$$

tout élément de $SO(E)$ est donc central.

La dernière question, moins guidée, est plus difficile:

$dim(E) = 3$: on sait que $SO(E)$ est l'ensemble des rotations d'axe. On a vu dans l'exercice 1, fiche 5, que si $\rho \in SO(E)$ commute avec la rotation r d'axe D, alors $\rho(D) = D$.
Fixons une bon $B = (v_1, v_2, v_3)$ de E; si ρ commute avec toutes les rotations, elle commute en particulier avec toute rotation d'axe porté par $v_j, 1 \leq j \leq 3$, et donc $\rho(Vect(v_j)) = Vect(v_j), 1 \leq j \leq 3$, ce qui donne

$$Mat_B(\rho) = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{pmatrix}, t_j \in \{1, -1\}, det(\rho) = t_1 t_2 t_3 = 1.$$

Enfin, en faisant commuter ρ avec les rotations r_1 et r_2 de matrices

$$Mat_B(r_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Mat_B(r_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ (car $det(\rho) = t_1 t_2 t_3 = 1$), i.e. $\rho = id_E$.

Exercice 6, fiche 5

1. Pour utiliser le rappel sur les rotations planes (du début de ce fichier), on complète $\frac{u}{||u||}$ en une bon directe du plan $B = (\frac{u}{||u||}, \frac{u'}{||u'||})$.

La matrice d'une rotation r s'écrit alors $Mat_B(r) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. La condition

$$r(\frac{u}{|| u ||}) = \frac{v}{|| v ||}$$

équivaut à

$$a\frac{u}{|| u ||} + b\frac{u'}{|| u' ||} = \frac{v}{|| v ||},$$

i.e. a et b sont les 2 composantes de $\frac{v}{||v||}$ dans la base B. Cette rotation existe donc et elle est unique.
On appelle mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{u, v})$, tout réel θ tel que $a = cos(\theta)$ et $b = sin(\theta)$, i.e. tel que $Mat_B(r) = R_\theta$.
Attention: si θ est une telle mesure, toute autre mesure s'écrit $\theta + k2\pi$ pour un entier $k \in Z$.

2. Pour rappel, on dit que deux réels θ et ψ sont congrus modulo 2π s'il existe $k \in Z$ tel que $\theta - \psi = k2\pi$. Dans ce cas, on écrit $\theta \equiv \psi[2\pi]$. Cette congruence est une relation d'équivalence, i.e.
$\forall \theta, \theta \equiv \theta[2\pi]$,
$\forall \theta, \psi, \theta \equiv \psi[2\pi] \Leftrightarrow \psi \equiv \theta[2\pi]$,
$\forall \theta, \psi, \chi,\ \theta \equiv \psi[2\pi]$ et $\psi \equiv \chi[2\pi] \Rightarrow \theta \equiv \chi[2\pi]$.
L'exercice maintenant: soient r, r', r'' les uniques rotations (cf 1) telles que

$$r(\frac{u}{|| u ||}) = \frac{v}{|| v ||}, \quad r'(\frac{v}{|| v ||}) = \frac{w}{|| w ||}, \quad r''(\frac{u}{|| u ||}) = \frac{w}{|| w ||},$$

et soient $\theta, \theta', \theta''$ des mesures d'angles orientés pour r, r', r''.

Comme $r' \circ r(\frac{u}{||u||}) = \frac{w}{||w||}$, l' unicité d'une telle rotation nous dit que $r'' = r' \circ r$.

Si $Mat_B(r) = R_\theta$ et $Mat_B(r') = R_{\theta'}$, on a $Mat_B(r' \circ r) = R_{\theta'} R_\theta = R_{\theta'+\theta} = Mat_B(r'') = R_{\theta''}$; d'où $\theta'' \equiv \theta + \theta'[2\pi]$.

3. Dans la bon directe $B = (\frac{u}{||u||}, \frac{u'}{||u'||})$, on a

$$\frac{v}{\| v \|} = cos(\theta)\frac{u}{\| u \|} + sin(\theta)\frac{u'}{\| u' \|}$$

donc

$$\begin{aligned}\langle \frac{u}{\| u \|}, \frac{v}{\| v \|} \rangle &= cos(\theta)\langle \frac{u}{\| u \|}, \frac{u}{\| u \|} \rangle + sin(\theta)\langle \frac{u}{\| u \|}, \frac{u'}{\| u' \|} \rangle \\ &= cos(\theta).\end{aligned}$$

Avant de calculer le déterminant, une remarque générale: soit deux vecteurs u et v, deux bases B et B' et $Mat_B(u, v)$ et $Mat_{B'}(u, v)$ les matrices dont les colonnes sont les composantes de u et v dans les bases B et B'. Si P désigne la matrice de passage de B vers B', un calcul donne

$$det(Mat_B(u, v)) = det(P)\, det(Mat_{B'}(u, v)).$$

Le déterminant de $Mat_B(u, v)$ dépend donc du choix de la base.

Par contre, si B et B' sont deux bases orthonormées directes du plan, la matrice de passage P est une matrice de rotation dont le déterminant est égal à 1. Dans cette situation, le déterminant de $Mat_B(u, v)$ est indépendant du choix de la base!

L'exercice maintenant: par ce qui précède, le calcul est indépendant de la bon directe du plan. Dans la base $B = (\frac{u}{||u||}, \frac{u'}{||u'||})$ du 1, on a

$$det_B(\frac{u}{\| u \|}\ \frac{v}{\| v \|}) = det(\begin{pmatrix} 1 & cos(\theta) \\ 0 & sin(\theta) \end{pmatrix}) = sin(\theta).$$

4.

a) Dire que f est direct signifie $det\, f = 1$; c'est donc une rotation. Soit r l'unique rotation telle que $r(\frac{u}{||u||}) = \frac{v}{||v||}$.

On sait que les rotations commutent, en particulier $f \circ r = r \circ f$. On a donc

$$r(f(\frac{u}{\| u \|})) = f(r(\frac{u}{\| u \|})) = f(\frac{v}{\| v \|}).$$

Comme f conserve la norme, on a $\| u \| = \| f(u) \|$, idem pour v, ce qui donne

$$r(\frac{f(u)}{\| f(u) \|}) = \frac{f(v)}{\| f(v) \|}.$$

La même rotation r convient donc pour les couples (u, v) et $(f(u), f(v))$, les mesures d'angle orienté sont donc congrues modulo 2π (on peut les prendre égales).

b) On suppose $det\, f = -1$; f est donc une réflexion.

Une remarque pour commencer: pour deux réflexions planes s et s', on a $det(s' \circ s) = 1$ et, par la question a),

$$(s' \circ s(x) \hat{,} s' \circ s(y)) \equiv (x \hat{,} y)[2\pi].$$

En prenant $x = s(u)$ et $y = s(v)$ on a donc (pour rappel, $s \circ s = id$)

$$(s'(u) \hat{,} s'(v)) \equiv (s(u) \hat{,} s(v)[2\pi].$$

Ceci montre que la congruence cherchée est indépendante du choix de la réflexion f.
Soit θ une mesure de $(u \hat{,} v)$.
En prenant f la réflexion de droite fixe $Vect(u)$, on a

$$f(\frac{u}{|| u ||}) = \frac{u}{|| u ||}, \quad f(\frac{v}{|| v ||}) = cos(\theta)\frac{u}{|| u ||} - sin(\theta)\frac{u'}{|| u' ||}.$$

Sur une figure du plan, on voit qu'une mesure de $(f(u) \hat{,} f(v)) = (u, \hat{f}(v))$ est $2\pi - \theta$ et on a bien $(f(u) \hat{,} f(v)) \equiv -\theta[2\pi]$.