Université Claude Bernard (Lyon 1) Printemps 2017-2018

UE Math IV Algèbre L2

Fiche n° 5

Isométries. Angles.

Exercice 1. Soit E un espace euclidien de dimension 3.

1. On se donne deux droites vectorielles D et D' distinctes de E. Montrer, en décrivant un procédé de construction, qu'il existe un endomorphisme orthogonal $\rho \in O^+(E)$ tel que $\rho(D) = D'$.
   Si $r \in O(E)$ est une rotation d'axe D, quelle est la nature de $\rho \circ r \circ \rho^{-1}$?
2. Soient r et r' deux rotations d'axes D et D' qui commutent : $r \circ r' = r' \circ r$. Montrer que $D = D'$ ou $D \perp D'$ et r et r' sont des demi-tours.

Exercice 2. Donner une décomposition en un produit de réflexions des matrices orthogonales suivantes

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. On se place dans l'espace euclidien R^3 et on désigne par C le cube unité *usuel* centré en $(0, 0, 0)$. Donner la matrice dans la base canonique des endomorphismes suivants :

1. la rotation de $\frac{\pi}{2}$ d'axe passant par le centre $O = (0, 0, 0)$ et le point $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$
2. la rotation de π d'axe passant par O et le point $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$
3. la rotation de $\frac{2\pi}{3}$ d'axe passant par O et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
4. la réflexion dont le plan fixe a pour equation $y + z = 0$.

A titre informatif : Voici la liste des 48 endomorphismes orthogonaux qui conservent les sommets du cube.

1. l'identité,
2. les 9 rotations de $\frac{\pi l}{3}$, $1 \leq l \leq 3$, d'axe passant par O et le centre d'une face,
3. les 6 rotations de π d'axe passant par O et le milieu d'une arête,
4. les 8 rotations de $\frac{2\pi l}{3}$, $1 \leq l \leq 2$, d'axe passant par O et un sommet de C.
5. l'homothétie ι de centre O et de rapport -1 (i.e. la symétrie centrale de centre O),
6. les composées $\iota \circ \rho$ où ρ est l'une des 23 rotations non triviales décrites en (2), (3), (4).

Exercice 4. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E. On dit qu'un endomorphisme orthogonal $f \in O(E)$ est *central* s'il commute avec tous les endomorphismes orthogonaux : $\forall \sigma \in O(E),\ \sigma \circ f = f \circ \sigma$. Soit f un endomorphisme de E qui commute avec toutes les symétries orthogonales $s \in O(E)$.

1. Montrer que la matrice de f dans la base $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ est diagonale. [Faire commuter f avec les réflexions s_j d'hyperplan fixe $Vect(v_1,\dots,v_{j-1},v_{j+1},\dots,v_n)$.]
2. Montrer ensuite que l'endomorphisme f est une homothétie. [Utiliser d'autres réflexions.]
3. En déduire, en vous servant d'un théorème de cours, la liste des éléments centraux de $O(E)$, Même question pour $O^+(E)$ en dimension $n=2$ et $n=3$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension $n\geq 3$. On appelle retournement de E toute symétrie orthogonale dont le sous-espace fixe $V\subset E$ est de dimension $n-2$.

1. Soient s et s' deux réflexions distinctes d'hyperplans fixes H et H'.
   (a) Quelle est la dimension de $H\bigcap H'$?
   (b) Montrer que s et s' conserve $(H\bigcap H')^\perp$.
2. Pour une base orthonormée $(e_1,\dots,e_{n-2})$ de $H\bigcap H'$, on définit les endomorphismes r et r' de E en posant

   $r(e_j)=e_j,\ j\in[1,n-3],\ r(e_{n-2})=-e_{n-2},\ r_{|_{(H\cap H')^\perp}}=s_{|_{(H\cap H')^\perp}}$. Idem pour r' en remplaçant s par s'.

   (a) Montrer que r et r' sont des retournements et que $r\circ r'=s\circ s'$.
   (b) En vous servant d'un théorème de cours, déduire du a) que tout endomorphisme $f\in O^+(E)$ est une composée de retournements.

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et u et v deux vecteurs non nuls de E.

1. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme $\dfrac{u}{\|u\|}$ en $\dfrac{v}{\|v\|}$. On rappelle que l'on appelle alors (mesure de l')angle orienté de vecteurs $\widehat{(u,v)}$ une mesure θ de l'angle de la rotation r.
2. Soit $w\in E$ non nul. Montrer que $\widehat{(u,w)}\equiv\widehat{(u,v)}+\widehat{(v,w)}\ [2\pi]$.
3. Notons $\theta=\widehat{(u,v)}$. Montrer que $\langle u,v\rangle=\|u\|\|v\|\cos(\theta)$ et $\det(u,v)=\|u\|\|v\|\sin(\theta)$.
4. Soit f un endomorphisme orthogonal de E.
   (a) On suppose que f est direct. Montrer que $(\widehat{f(u),f(v)})\equiv\widehat{(u,v)}\ [2\pi]$.
   (b) On suppose que f est indirect. Montrer que $(\widehat{f(u),f(v)})\equiv-\widehat{(u,v)}\ [2\pi]$.
   (c) Application : Soit (ABC) un triangle isocèle en A (*i.e.* tel que $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AC}\|$).
   Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})\ [2\pi]$.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.

1. Déterminer l'expression dans la base $\mathcal{B}$ du produit vectoriel de deux vecteurs u et v de E en fonction de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.
2. Soient u,v deux vecteurs normés orthogonaux de E et $w\in E$. Montrer que la famille (u,v,w) est une base orthonormée de E si et seulement si $w=\pm u\wedge w$. À quelle condition cette base est-elle directe ?
3. Application : Déterminer toutes les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\end{pmatrix}$.
4. Démontrer la formule du double produit vectoriel :

$$\forall(u,v,w)\in E,\quad u\wedge(v\wedge w)=\langle u,w\rangle v-\langle u,v\rangle w.$$

5. Soient $a, b, c \in E$ non nuls. On note $a' = b \wedge c$, $b' = c \wedge a$, $c' = a \wedge b$ et $v = \|a\|a' + \|b\|b' + \|c\|c'$. On suppose que $v \neq 0$. Montrer que : $\cos\widehat{(v, a)} = \cos\widehat{(v, b)} = \cos\widehat{(v, c)}$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté.

1. Soient w un vecteur unitaire de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la rotation r d'angle θ autour de l'axe D dirigé et orienté par le vecteur w.
   (a) Soit $x \in E$ un vecteur orthogonal à w. Montrer que $r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)w \wedge x$.
   (b) On suppose désormais que x est un vecteur unitaire orthogonal à w. Montrer que
   $$\cos(\theta) = \langle x, r(x)\rangle \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = [x, r(x), w] = [w, x, r(x)]$$
   où $[a, b, c]$ désigne le produit mixte des vecteurs $a, b, c \in E$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur $w = (1, 1, 0)$.
3. Déterminer la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est
   $$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 9. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Le but de l'exercice est de démontrer l'équivalence suivante :
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \iff f \text{ est une rotation ou } f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Supposons que f est une rotation.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $\det(f(x), f(y), f(z)) = \det(x, y, z)$.
   (b) Pour $(x, y, z) \in E^3$, simplifier $\langle f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y), z\rangle$.
   (c) Conclure.
2. Supposons désormais que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et vérifie : $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base orthonormée directe de E.
   (c) Conclure.
3. Deuxième méthode pour le sens direct : supposons que $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
   (a) Simplifier $\langle f(x) \wedge f(y), f(z)\rangle$ pour $(x, y, z) \in E^3$.
   (b) Montrer que pour tout $w \in E$, il existe $x, y \in E$ tels que $w = x \wedge y$.
   (c) En déduire que $f^* \circ f = \det(f)\mathrm{Id}$.
   (d) Démontrer qu'alors $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou f est une rotation.