Université Claude Bernard (Lyon 1) Printemps 2017-2018

UE Math IV Algèbre L2

Fiche n° 4

Exercice 1. Soit E un espace euclidien. Soient $a \in E$ et α, β, γ trois réels. Résoudre $\alpha \langle x, x \rangle + \beta \langle x, a \rangle + \gamma = 0$.

Exercice 2. En définissant le bon produit scalaire, montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on a

$$(tr(AB + BA))^2 \leq 4tr(A^2)tr(B^2)$$

Exercice 3. Soit E un espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

Exercice 4. On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \middle| x + y + z + t = x - y + z - t = 0\right\}.$$

1. Trouver une base orthonormée de F.
2. Trouver une base orthonormée de $F^\perp$.
3. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.

Exercice 5. On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $(2, 2)$. Le but de l'exercice est d'expliciter les matrices de $O_2(\mathbb{R})$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
   (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c).
   (c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :
   $$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ et $R_{\theta'}$ commutent. Les élements de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?
4. On se place dans un plan euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?