Fiche 3

Exercice 1. Changement de base.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ avec la base canonique. Pour deux vecteurs arbitraires $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ on définie une forme bilinéaire ϕ par la formule $\phi(v_1, v_2) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$. Soit M la matrice de la forme billinéaire ϕ dans la base canonique (expliciter !)

Soit B une base formée de vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer la matrice de la forme ϕ dans cette base B de deux façons différentes :
   (a) en multipliant les vecteurs f_i et f_j pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$;
   (b) en calculant la matrice de passage C de la base canonique vers la base B et en utilisant la formule $M' = {}^tCMC$.
2. Soient (x'_1, x'_2, x'_3) et (y'_1, y'_2, y'_3) les coordonnées de vecteurs v_1 et v_2 dans la base B. Trouver la valeur de la forme bilinéaire $\phi(v_1, v_2)$ en fonction de (x'_1, x'_2, x'_3) et (y'_1, y'_2, y'_3).

Exercice 2. Matrice de projecteur.

On se donne $v_1 = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F, projecteur orthogonal sur F, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver une base B pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.
3. Déterminer toutes les bases de R^3 pour lesquelles la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.

Exercice 3. Sur les projecteurs.

Soit $p : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n.

— On dit que p est un projecteur si $p^2 = p$.

— Soient F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$. On dit que p est la projection sur F parallèlement à G si pour tout $(f, g) \in F \times G$, $p(f + g) = f$.

1. On suppose que p est un projecteur. Montrer que $E = \mathrm{Im(p)} \oplus \mathrm{ker(p)}$ et que p est la projection sur $\mathrm{Im(p)}$ parallèlement à $\ker(p)$.
2. On suppose que p est la projection sur F parallèlement à G. Montrer que p est un projecteur.

On suppose maintenant que E est muni d'un produit scalaire. On dit que p est un projecteur orthogonal s'il existe un sous-espace F tel que p soit la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

3. Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et s. si : $\forall(x, y) \in \mathrm{Im(p)} \times \mathrm{ker(p)}$, $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0$.

Exercice 4. Révision du cours.

Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $x \in E$. On pose $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$. Montrer que

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$$

Exercice 5. Hyperplan.

Un hyperplan dans l'espace vectoriel E c'est un sous-espace de E tel que sa dimension est égale à $(\dim E - 1)$.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$< a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

On note H l'hyperplan suivant : $H = \{P(X) \in E | \ P(1) = 0\}$

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H puis la distance de X à H.

Exercice 6.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \cdots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$< P, Q >= \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier qu'avec cette application, E est muni d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormé de E.
3. Pour $Q \in E$ quelconque, déterminer la distance de Q à $H = \{P \in E | \sum_{i=1}^{n} P(a_i) = 0\}$

Exercice 7.

Dans $\mathbb{R}^6$ soit $H = \{(x_1, \cdots, x_6) \in \mathbb{R}^6 | \ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$ puis la distance entre $u = {}^t(1, -1, 0, 2, 4, 0)$ et H.

Exercice 8.

Dans $Mat_n(\mathbb{R})$ on note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques. On muni $Mat_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $< M, N >= \sum_{i,j} m_{ij}n_{ij}$ où m_{ij} sont des coefficients de M et n_{ij} sont ceux de N.

1. Vérifier que pour $M, N \in Mat_n(\mathbb{R})$, $< M, N >= \mathrm{tr}({}^tM \cdot N)$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Remarquer que $< {}^tS, {}^tA >=< S, A >$. En déduire que $< S, A >= 0$.
3. Déduire de la question précédente que $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}^\perp$ puis que $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$.
4. On conclut alors que $Mat_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$. Soit $M \in Mat_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique $S \in \mathcal{S}$ et l'unique $A \in \mathcal{A}$ en fonction de M telles que $M = S + A$.
5. Dans $Mat_2(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre M et $\mathcal{S}$, la distance entre M et $\mathcal{A}$, puis entre $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.