

**Fiche 2**

**Exercice 1 (Calcul d'orthogonaux)** On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ . On définit

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \longmapsto {}^t X A Y .$$

1. Montrer que  $\langle , \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$ .
2. Calculer une base pour chacun des orthogonaux de  $F = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et de  $X = \{(0, 1, 0)\}$  par rapport à  $\langle , \rangle$ .

**Exercice 2 (Gram-Schmidt, exemples)**

**I.** On munit  $\mathbb{R}^3$  du produit scalaire usuel.

1. Trouver une base orthonormée pour le plan  $(2, -3, 6)^\perp$ .
2. Montrer que  $(u_1, u_2, u_3)$  avec  $u_1 = (1, 2, 2)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (1, 1, 0)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
 Trouver une base orthonormée  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $e_1$  soit colinéaire à  $u_1$ , et que le plan engendré par  $e_1$  et  $e_2$  soit égal à celui engendré par  $u_1, u_2$ .

**II.** Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 3$ .

1. Montrer que l'application

$$b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \longmapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur  $E$ .

2. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, construire à partir de  $(1, X, X^2, X^3)$  une base orthonormée.

**Exercice 3 (La géométrie des matrices)** On munit l'espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  du produit scalaire suivant :

$$\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) \longmapsto \text{tr}(A {}^t B)$$

- (a) Montrer que  $\phi$  définit un produit scalaire.
- (b) Déterminer une base orthonormée pour le sous-espace  $S$  des matrices symétriques.
- (c) Écrire une matrice arbitraire de  $E$  comme combinaison linéaire de ses coordonnées dans  $S$  et  $S^\perp$ .
- (d) Déterminer la distance d'une matrice arbitraire de  $E$  à  $S$ .
- (e) On fixe la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base orthonormée pour  $A^\perp$ .

- (f) Déterminer pour une matrice arbitraire de  $E$  sa projection orthogonale sur  $A^\perp$ .

**Exercice 4 (La géométrie des polynômes)** On se place dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  des polynômes de degré au plus 3, à coefficients réels. On munit  $E$  du produit scalaire suivant :

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 .$$

On définit  $H = \{P \in E : P(1) = 0\}$ .

1. Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 3.
2. Déterminer une base orthonormée de  $H$ .
3. Dédurre du point précédent la projection orthogonale de  $X$  sur  $H$ . Compléter la base que vous avez déterminée dans le point précédent à une base de  $E$  de votre choix, et écrire la matrice de la projection orthogonale sur  $H$  dans cette base.
4. Déterminer la distance d'un polynôme de  $E$  à  $H$  en fonction de ses coefficients.

**Exercice 5 (Caractérisation d'un produit scalaire)**

1. Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel. On note  $\| \cdot \|$  la norme associée à ce produit scalaire. Montrer les trois formules de polarisations :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Montrer que  $\| \cdot \|$  vérifie l'identité du parallélogramme, i.e.

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une norme  $\| \cdot \|$  vérifiant l'identité du parallélogramme. Pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on pose

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) .$$

- (a) Montrer que pour tous  $x, y \in E$ ,  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$  et  $\varphi(x, x) = \|x\|^2$ .
  - (b) Montrer que pour tout  $x, y \in E$ ,  $\varphi(x, 2y) = 2\varphi(x, y)$ . Indication : démarrer avec  $\|x + 2y\|^2 + \|x\|^2$ .
  - (c) Montrer que pour tous  $x, y, z \in E$ ,  $\varphi(x + z, y) = \varphi(x, y) + \varphi(z, y)$ .
  - (d) Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{N}$ , pour tous  $x, y \in E$ ,  $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$ . Montrer que ceci est encore vrai pour tout  $\lambda \in \mathbb{Q}$  puis pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
  - (e) En déduire que toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est induite par un produit scalaire.
3. Montrer que la norme  $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$  sur  $\mathbb{R}^2$  n'est pas associée à un produit scalaire.