Fiche 2

Exercice 1 (Gram-Schmidt, exemples)

I. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.

1. Trouver une base orthonormée pour le plan $(2,-3,6)^\perp$.
2. Montrer que (u_1,u_2,u_3) avec $u_1=(1,2,2)$, $u_2=(1,0,1)$, $u_3=(1,1,0)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base orthonormée (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que e_1 soit colinéaire à u_1, et que le plan engendré par e_1 et e_2 soit égal à celui engendré par u_1, u_2.

II. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3.

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccl} b & : & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P,Q) & \longmapsto & \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt \end{array}$$
définit un produit scalaire sur E.
2. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, construire à partir de $(1,X,X^2,X^3)$ une base orthonormée.

Exercice 2 On appelle l'orthogonal d'une partie A de E l'ensemble, noté $A^\perp$, consitué de vecteurs de E ortogonaux à tous les vecteurs de A : $A^\perp=\{x\in E|\forall a\in A, <a,x>=0\}$

1. Pour $A,B\subset E$ montrer que
   (a) $A\subset (A^\perp)^\perp$
   (b) $A\subset B \Rightarrow B^\perp\subset A^\perp$
   (c) $A^\perp=(\mathrm{Vect}(A))^\perp$.
2. Soit F et G deux sous-espaces de E. Montrer l'équivalence entre trois conditions :
   (a) F et G sont orthogonaux ;
   (b) $F\subset G^\perp$;
   (c) $G\subset F^\perp$.
3. Si deux sous-espaces de F et G sont orthogonaux alors $F\cap G=\emptyset$.

Exercice 3 (Calcul d'orthogonaux)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. On définit
$$\begin{array}{rccl} \langle\ ,\rangle & : & \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (X,Y) & \longmapsto & {}^tXAY \end{array}.$$

1. Montrer que $\langle\ ,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer une base pour chacun des orthogonaux de $F=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et de $X=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ par rapport à $\langle\ ,\rangle$.

Exercice 4 (Caractérisation d'un produit scalaire)

1. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\|\ \|$ la norme associée à ce produit scalaire. Montrer les trois formules de polarisations :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

   Montrer que $\|\ \|$ vérifie l'identité du parallélogramme, i.e.

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\ \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on pose

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

   (a) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ et $\varphi(x, x) = \|x\|^2$.

   (b) Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, 2y) = 2\varphi(x, y)$. Indication : démarrer avec $\|x+2y\|^2 + \|x\|^2$.

   (c) Montrer que pour tous $x, y, z \in E$, $\varphi(x+z, y) = \varphi(x, y) + \varphi(z, y)$.

   (d) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, pour tous $x, y \in E$, $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$. Montrer que ceci est encore vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (e) En déduire que toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est induite par un produit scalaire.

3. Montrer que la norme $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$ sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas associée à un produit scalaire.

Exercice 5 (La géométrie des matrices) On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}(A\ {}^tB) \end{array}$$

(a) Montrer que ϕ définit un produit scalaire.

(b) Déterminer une base orthonormée pour le sous-espace S des matrices symétriques.

(c) Écrire une matrice arbitraire de E comme combinaison linéaire de ses coordonnées dans S et $S^\perp$.

(d) Déterminer la distance d'une matrice arbitraire de E à S.

(e) On fixe la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base orthonormée pour $A^\perp$.

(f) Déterminer pour une matrice arbitraire de E sa projection orthogonale sur $A^\perp$.

Exercice 6 (La géométrie des polynômes) On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des polynômes de degré au plus 3, à coefficients réels. On munit E du produit scalaire suivant :

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\ .$$

On définit $H = \{P \in E : P(1) = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3.
2. Déterminer une base orthonormée de H.
3. Déduire du point précédent la projection orthogonale de X sur H. Compléter la base que vous avez déterminée dans le point précédent à une base de E de votre choix, et écrire la matrice de la projection orthogonale sur H dans cette base.
4. Déterminer la distance d'un polynôme de E à H en fonction de ses coefficients.