Questions, exemples et solutions d'exercices

On suppose que E est un espace euclidien, i.e. E est un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle_E$.

Voici une question naturelle: *Y-a-t-il un espace euclidien de dimension n comparable à tout autre?*

La réponse est oui en un sens précis: tout espace euclidien E de dimension n est isomorphe à R^n muni du produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle_n$ usuel, i.e. il existe une bijection linéaire $f : E \to R^n$ telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle_E = \langle f(x), f(y)\rangle_n$.

Pour le voir, choisissons une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$ de E pour le produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle_E$ et désignons par $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de R^n (cette base est orthonormée pour $\langle\, ,\, \rangle_n$). L'application

$$f : E \to R^n : x = \sum_i x_i v_i \mapsto \sum_i x_i e_i$$

est un isomorphisme (l'image d'une base est une base) et f transforme $\langle\, ,\, \rangle_E$ en $\langle\, ,\, \rangle_n$ car

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y)\rangle_n &= \langle \sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\rangle_n \\
&= \sum_{i,j} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle_n \\
&= \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i,j} x_i y_j \langle v_i, v_j\rangle_E \\
&= \langle x, y\rangle_E.
\end{aligned}$$

C'est une observation importante: à isomorphisme près, il n'y a qu'un seul espace euclidien de dimension n.

Remarque: il y a une infinité de tels isomorphismes f: tout choix d'une bon de E donne un isomorphisme.

Q_1. *Une matrice symétrique réelle est-elle nécessairement diagonalisable?*

réponse: oui.

Fixons une bon $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de E et soit

$$\phi : End(E) \to M_n(R) : f \mapsto \phi(f) = Mat_B(f)$$

l'application qui à f associe la matrice de $f \in End(E)$ dans la base B.

On sait que ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels; de plus, f est auto-adjoint ssi $\phi(f)$ est une matrice symétrique.

Par le cours, on sait que si f est auto-adjoint, il existe une bon B' de E constituée de vecteurs propres de f, i.e. telle que $Mat_{B'}(f)$ soit une matrice diagonale. Si $P_{B\mapsto B'}$ désigne la matrice de passage de B vers B', on a

$$Mat_B(f) = P_{B\mapsto B'} Mat_{B'}(f) P_{B'\mapsto B},$$

i.e. la matrice symétrique $Mat_B(f)$ est diagonalisable.

Q_2. *Une matrice symétrique complexe est-elle nécessairement diagonalisable?*

réponse: non.

Voici un exemple: pour $a, b \in R, a \neq b$, prendre $S = \begin{pmatrix} a & (\frac{a-b}{2})i \\ (\frac{a-b}{2})i & b \end{pmatrix}$; son polynôme caractéristique est $\chi_S(X) = (X - \frac{a+b}{2})^2$ et, comme $S \neq \frac{a+b}{2}I_2$, S n'est pas diagonalisable. ($\chi_S(X)$ est son polynôme minimal et il n'est pas simple!)

On peut être plus explicite ici: si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a-b}{2} & i\frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$, PSP^{-1} est sous forme de Jordan

$$PSP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & 1 \\ 0 & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix}.$$

Conclusion: se méfier des matrices symétriques complexes.

Q_3. *Une rotation r de R^3 est-elle nécessairement diagonalisable?*

réponse: non.

Dans une bon de premier vecteur un vecteur directeur de l'axe de r, la matrice de r s'écrit (voir fiche 4 bis exercice 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sin\,\theta \\ 0 & sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}.$$

Son spectre est $1, e^{\pm i\theta}$. Le spectre est donc réel ssi $\theta \equiv 0[2\pi]$ ($r = id$) ou $\theta \equiv \pi[2\pi]$ (r est un demi-tour).

Conclusion: l'identité et les demi-tours sont les seules rotations diagonalisables.

Remarque: cela se voit géométriquement: dans le plan orthogonal à l'axe, la rotation d'angle θ ne stabilise, en général, aucune droite.

Q_4. Qu'appelle-t-on *symétrie*? *Symétrie orthogonale* ? *Réflexion*?

En algèbre linéaire, on appelle *symétrie* tout endomorphisme

$$s : E \to E, \quad \text{tel que } s \circ s = id_E.$$

Une symétrie s est diagonalisable ($X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule s) et son spectre est contenu dans $\{+1, -1\}$.

Notons $E_\pm = Ker(s \mp id_E)$ les sous-espaces propres de s pour ± 1.

Une *symétrie orhogonale* est une symétrie qui est aussi un endomorphisme orthogonal. C'est le cas ssi E_+ et E_- sont des sous-espaces orthogonaux.

Une *réflexion* est une symétrie orthogonale pour laquelle $dim\,E_+ = dimE - 1$.

Q_5. Comment calculer l'image d'un élément $\vec{x} \in E$ par la réflexion s de plan fixe $P = E_+$ dans R^3?

Ici il est utile de faire une figure.

Pour obtenir $s(\vec{x})$ on commence par décomposer $E = E_+ \oplus E_- = P \oplus P^\perp$ en somme directe de sous-espaces propres de s. Si $\vec{x} = \vec{x}_+ + \vec{x}_-$ est l'écriture de $\vec{x}$ dans cette décomposition, alors $s(\vec{x}) = \vec{x}_+ - \vec{x}_-$.

Pour le faire explicitement, on peut, par exemple, expliciter une bon $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de R^3 adaptée à la situation, i.e. telle que $P = Vect(\vec{u}, \vec{v})$ et donc $P^\perp = Vect(\vec{w})$.

En écrivant $x = \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle \vec{u} + \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle \vec{v} + \langle \vec{w}, \vec{x} \rangle \vec{w}$, on a

$$s(\vec{x}) = \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle \vec{u} + \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle \vec{v} - \langle \vec{w}, \vec{x} \rangle \vec{w}.$$

Exemple de réflexion: supposons $P = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Pour décrire la réflexion s de plan fixe P, on commence par expliciter une bon adaptée, par exemple

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

On écrit ensuite $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans cette base:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\frac{y-z}{\sqrt{2}}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (\frac{y+z}{\sqrt{2}}) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

la réflexion est alors

$$s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (\frac{y-z}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - (\frac{y+z}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}.$$

Voici une autre solution: on commence par projeter $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur la droite Vect $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ orthogonale au plan P: le projeté orthogonal de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrit (les indices + et − sont comme en Q_5)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_- = \frac{\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(y+z)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on observe que

$$s \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_+ - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_- = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_- = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}.$$

Exemple de diagonalisation d'une matrice symétrique réelle: (exercice 8, fiche 4 bis)

On souhaite diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Il s'agit de suivre les étapes habituelles:

1) polynôme caractéristique $\chi_A(X) = det(A - XI_3)$

2) racines λ de $\chi_A(X)$= valeurs propres de A

3) sous-espaces propres E_λ de A de valeur propre λ = solutions de l'équation $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Voici ce que j'obtiens:
1) $\chi_A(X) = (3 - X)(X^2 - 3X - 10)$
2) $\chi_A(X) = (3 - X)(X + 2)(X - 5)$
3)

$$E_3 = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}),\ E_{-2} = Vect(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}),\ E_5 = Vect(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Ces sous-espaces sont (comme il se doit) deux à deux orthogonaux. En choisissant une bon B de vecteurs propres de A (i.e. en normant les 3 vecteurs ci-dessus), la matrice de passage P de la base canonique à cette bon B est orthogonale et on a

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} {}^tP$$

(ici $P^{-1} =^t P$).

Q_6. Que peut-on dire d'un endomorphisme orthogonal f de déterminant -1 de R^3?

réponse: on sait qu'un endomorphisme réel en dimension 3 admet au moins une valeur propre réelle; f étant orthogonal cette valeur propre est $+1$ ou -1. On sait aussi que $det\, f$ est le produit des valeurs propres (dans C) de f:

$$-1 = detf = \Pi_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i.$$

Si le spectre est réel, -1 est de multiplicité 1 ou 3 (donc au moins 1). Si le spectre n'est pas réel, deux des trois valeurs propres sont de la forme $\lambda, \overline{\lambda} \in C \setminus R$ avec $\lambda\overline{\lambda} = 1$. La troisième est donc -1.

Si $\vec{e}$ est un vecteur propre pour -1, dans toute bon B de premier vecteur $\vec{e}$ la matrice de f s'écrit

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

avec $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale de déterminant $+1$, i.e. R est la matrice d'une rotation plane. L'écriture

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & \\ & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & R \end{pmatrix}$$

montre que f est la composée d'une réflexion et d'une rotation dans le plan fixe de cette réflexion.

Reprise de l'exercice 1, fiche 5

La question 1 de cet exercice n'est pas (a priori) simple: la solution algébrique utilise plusieurs propriétés connues, la solution géométrique se sert d'une figure de la situation.

1. On se donne deux droites D et D' distinctes de l'espace euclidien E de dimension 3 et il s'agit de montrer qu'il existe une transformation orthogonale f de déterminant $+1$ telle que $f(D) = D'$.

Première solution (de nature algébrique):

On utilise 3 propriétés:

(1) Tout vecteur $\vec{u}$ de norme 1 de E peut être complété en une base orthonormée de E: en effet, on commence par compléter $\vec{u}$ en une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de E et on utilise l'algorithme de Gram-Schmidt sur cette base pour obtenir une bon $(\vec{u}, \vec{u}\,', \vec{u}\,'')$.

(2) Se donner un endomorphisme f de E équivaut à se donner l' image par f d'une base de E: en effet, si $(\vec{u}_i)_{1\leq i\leq 3}$ est une base de E et $(\vec{v}_i)_{1\leq i\leq 3}$ est une famille arbitraire d'éléments de E, l'application

$$f : E \to E : \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{u}_i \mapsto \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{v}_i$$

est l'unique endomorphisme de E tel que $\forall i,\ f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$.

(3) Un endomorphisme f de E est orthogonal ssi il transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

L'exercice maintenant:

Soient $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_1\,'$ deux vecteurs de norme 1 tels que $D = Vect(\vec{e}_1)$ et $D' = Vect(\vec{e}_1\,')$ que l'on complète (par le rappel (1)) en deux bases orthonormées $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,')$. L'unique application linéaire $f : E \to E$ définie par

$$f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i\,', \quad 1 \leq i \leq 3$$

est orthogonale (par le rappel (3)) et satisfait à $f(D) = D'$.

Si $det\, f = +1$, prendre $\rho = f$; c'est fini.

Si $det\, f = -1$, notons s la symétrie orthogonale définie par

$$s(\vec{e}_1\,') = e_1\,', s(\vec{e}_2\,') = \vec{e}_2\,', s(\vec{e}_3\,') = -\vec{e}_3\,'.$$

L'application $s \circ f$ est orthogonale, elle satisfait à $(s \circ f)(D) = D'$; de plus, $det(s \circ f) = det\, s\, det\, f = (-1)^2 = 1$. On peut donc prendre $\rho = s \circ f$.

Une autre solution (de nature géométrique):

On sait qu'une transformation orthogonale de déterminant $+1$ en dimension 3 est une rotation. Pour voir la situation, on commence par faire une figure: on trace D, D' et ensuite l'unique plan vectoriel P contenant ces 2 droites. On voit alors qu'une rotation d'axe $P^\perp$ faisant pivoter D sur D' convient.

Voici comment écrire cette observation: choisir des vecteurs directeurs $\vec{e}$ et $\vec{e}\,'$ normés de D et D'; on a donc $D = Vect(\vec{e})$ et $D' = Vect(\vec{e}\,')$ et $P = Vect(\vec{e}, \vec{e}\,')$. Choisir un vecteur directeur normé $\vec{e}\,''$ de l'axe $P^\perp$.

Toute rotation ρ d'axe $P^\perp$ fixe $\vec{e}\,''$ (par définition de l'axe!): $\rho(\vec{e}\,'') = \vec{e}\,''$.

De plus ρ transforme un vecteur de P en un vecteur de P: en effet, on sait que $\vec{w} \in P$ ssi $0 = \langle \vec{w}, \vec{e}\,'' \rangle$; ρ étant orthogonale, on a

$$\langle \vec{w}, \vec{e}\,'' \rangle = \langle \rho(\vec{w}), \rho(\vec{e}\,'') \rangle = \langle \rho(\vec{w}), \vec{e}\,'' \rangle,$$

en particulier $\langle \vec{w}, \vec{e}\,'' \rangle = 0$ ssi $\langle \rho(\vec{w}), \vec{e}\,'' \rangle = 0$. La restriction

$$\rho_{|P} : P \to P : \vec{w} \mapsto \rho(\vec{w})$$

est alors une rotation plane (c'est une transformation orthogonale du plan de déterminant $+1$). Afin d'avoir $\rho(D) = D'$, on choisit pour $\rho_{|P}$ l'unique rotation plane de l'exercice 6, fiche 5 telle que $\rho(\vec{e}) = \vec{e}\,'$.

Remarque: on peut utiliser le produit vectoriel de l'exercice 7, fiche 5: l'axe $P^{\perp}$ est dirigé par le vecteur $\vec{e} \wedge \vec{e}\,'$.

Passons à la suite de l'exercice: si r est une rotation d'axe D, alors $\rho \circ r \circ \rho^{-1}$ est de déterminant $+1$; c'est donc une rotation de l'espace. Afin de déterminer son axe, observer que si $\vec{u} = \lambda \vec{e} \in D$ alors

$$\rho \circ r \circ \rho^{-1}(\rho(\vec{u})) = \rho(r(\vec{u})) = \rho(\vec{u}),$$

i.e. cette nouvelle rotation est d'axe $Vect(\rho(\vec{e})) = D'$.

2. On se donne deux rotations r et r' d'axes $D = Vect(\vec{e})$ et $D' = Vect(\vec{e}\,')$ et on suppose $r' \circ r = r \circ r'$.

On a alors $r'(\vec{e}) = (r' \circ r)(\vec{e}) = (r \circ r')(\vec{e}) = r(r'(\vec{e}))$, i.e. $r'(\vec{e})$ appartient à l'axe D de la rotation r. Etant de norme 1, on a soit $r'(\vec{e}) = \vec{e}$ soit $r'(\vec{e}) = -\vec{e}$.

Si $r'(\vec{e}) = \vec{e}$, r et r' ont même axe, i.e. $D = D'$.

Supposons $r'(\vec{e}) = -\vec{e}$. On a alors

$$\langle \vec{e}, \vec{e}\,' \rangle = \langle r'(\vec{e}), r'(\vec{e}\,') \rangle = -\langle \vec{e}, \vec{e}\,' \rangle,$$

i.e. les axes D et D' sont orthogonaux.

Enfin, dans toute bon de premier vecteur $\vec{e}\,'$ la matrice de r' est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sin\,\theta \\ 0 & sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres complexes d'une telle matrice sont $1, e^{\pm i\theta}$, en particulier, -1 est valeur propre ssi $\theta \equiv \pi[2\pi]$ ssi r' est un demi-tour d'axe $\vec{e}\,'$.

Le même argument pour r conduit à $r(\vec{e}\,') = \pm\vec{e}\,'$; si les axes sont distincts, r est donc aussi un demi-tour.