Reflexions

pour le cours 6
du 22.03

4.2. Symétrie par rapport à un sousespace. Reflexions

Soit F un sse.v. de E et $E = F \oplus F^\perp$

$\forall x \in E \quad \exists x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$ t.q. $x = x_1 + x_2$

La symétrie s_F par rapport à F est définie par

$$s_F(x) = x_1 - x_2$$

On a $s_F = P_F - P_{F^\perp} = id - 2P_{F^\perp} = 2P_F - id$

On établi: $s_F^* = s_F$ et $s_F^2 = Id$

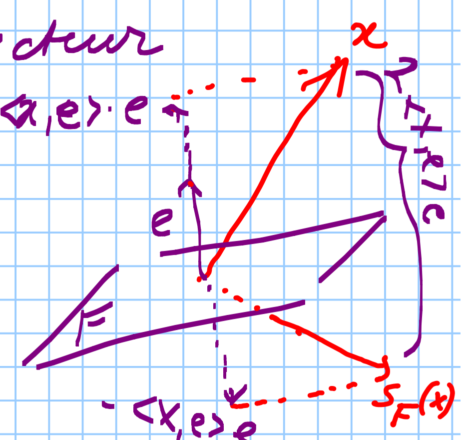
Autrement dit:

Une symétrie est auto-adjointe et orthogonale.

Defn Reflexion F - hyperplan, e - vecteur unitaire orthogonal à F

La reflexion par rapport à F

$$s_F = x - 2\langle x, e\rangle e$$



Matrice de reflexion $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

Thm (Cartan-Diedonné) Soit $u \in End\, E$ orthogonal ($\Leftrightarrow u$ - isométrie: $\forall x \in E \ \|u(x)\| = \|x\|$)

$r = rg(u - Id)$. Alors u s'exprime comme produit d'au plus r reflexions

En particulier: au plus $n = \dim E$ reflexions (comme $\max rg(u - Id) = n$)

Démo : Recurrence sur $r = rg(u - Id)$
Soit u - isométrie.

Proposition de recurrence $\mathcal{P}(r)$ si $r = rg(u - Id)$ alors $u = \tau_1 \dots \tau_{r'}$ où τ_k - une reflexion et $r' \leq r$

- Initialisation : $r = 0 \iff rg(u - Id) = 0 \iff u = Id$. Trivial : Id est un produit de 0 reflexions.

- Soit $r \neq 0$ i.e. $u \neq Id$

Supposons, $\forall$ isométrie v on a $\mathcal{P}(r)$ m.q. alors $\mathcal{P}(r+1)$ est vraie.

Comme $u \neq id$ il existe y t.q. $u(y) - y \neq 0$ Notons cette difference $z := u(y) - y$. On définit une reflexion S_F, où $F = z^\perp$

Comme $\|u(y)\| = \|y\|$ (isométrie) on a $\langle u(y) + y, u(y) - y \rangle = 0$ i.e. $\langle u(y) + y, z \rangle = 0$

et $u(y) + y \perp z \Rightarrow S_F(u(y) + y) = u(y) + y$

et avec $S_F(z) = -z \iff S_F(u(y) - y) = y - u(y)$

on a $S_F(u(y)) = y = id(y)$ mais $u(y) \neq y$

aussi for all x t.q $u(x) = x$ on a

$\langle x, z \rangle = \langle x, u(y) - y \rangle = \langle x, u(y) \rangle - \langle x, y \rangle$

$= \langle u(x), u(y) \rangle - \langle x, y \rangle = 0$ (u-isométrie)

$\Rightarrow \; x \in F = z^{\perp} \Rightarrow s_F(x) = x$

alors $\quad rg(u - Id) > rg(s_F u - Id)$

car $s_F u(x) = x \quad \forall x$ t.q. $u(x) = x$

mais aussi $s_F(u(y)) = y$ tandis que $u(y) \neq y$. Donc $rg(s_F u - Id) < r+1$

et par l'hypothèse $\mathcal{P}(r)$ on a

$s_F u = \tau_1 \dots \tau_{r'}$ où τ_i – des reflexions et $r' \leq r$

Comme $s_F^2 = Id$ on a

$\Rightarrow u = \underbrace{s_F \tau_1 \dots \tau_{r'}}_{r'+1} \Rightarrow r'+1 \leq r$

Q.E.D.