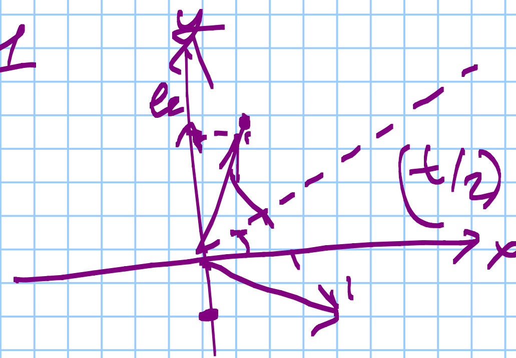
Algèbre IV. Cours #9

Symétries et rotations

Dim 2

A - symétrie : $\det A = -1$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$



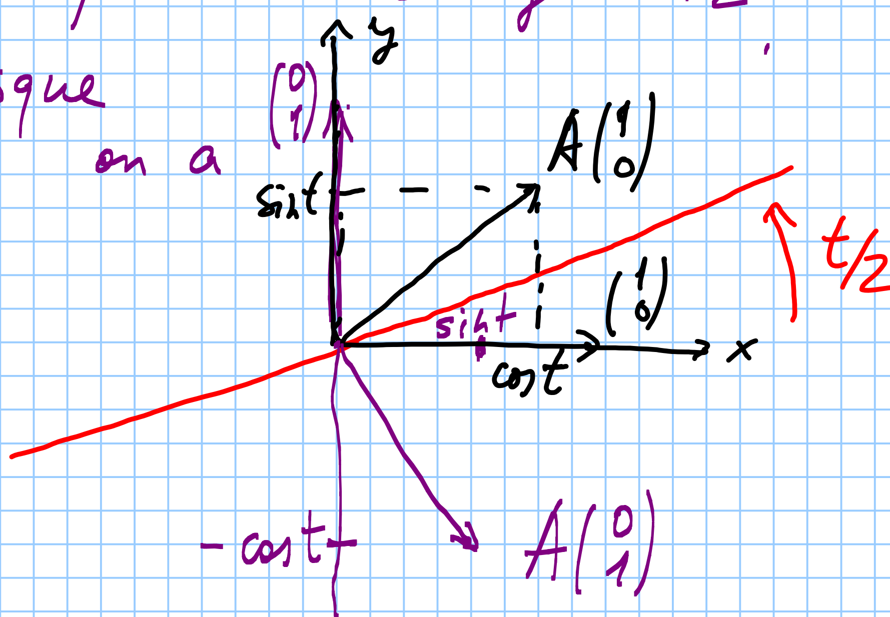
$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$ — symétrie de l'angle $t/2$

En effet, puisque

$e_1 \to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$e_2 \to \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$

on a

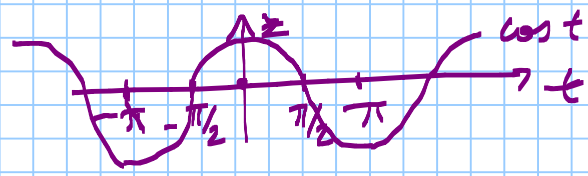


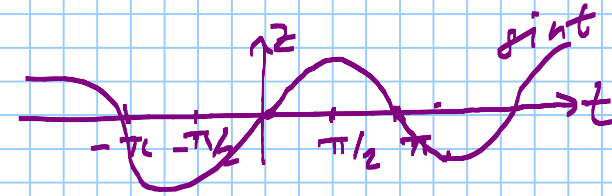
4.4 angles orientés dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (continuation)

Isometries : Soit $\varphi \in End(E)$. Les conditions suivantes sont equivalentes :

- $\forall u, v \in E$, $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$
- $\forall v \in E$, $\|\varphi(v)\| = \|v\|$
- φ est l'inverse de son adjoint
- φ envoie une base orthonormée sur une base orthonormée
- Les vecteurs-colonnes d'une matrice A de φ dans une base orthonormée forment une base orthonormée.

Rappel On fixe un plan euclidien P. On note $O(P)$ le gp des isometries de P, $SO(P)$ le gp. des isometries directes i.e. C'est le noyau du déterminant $\det : O(P) \to \{-1, 1\}$ i.e. $\det = 1$)





Lemme Étant donné $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $a^2+b^2=1$ il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ t.q.
$a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$

Remarque on a $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ i.e. θ mod. $2\pi\mathbb{Z}$. Relation d'équivalence : $\theta \doteq \tilde{\theta} \bmod 2\pi\mathbb{Z}$

Démo : Il existe $\theta_0 \in [0, \pi]$ t.q. $a = \cos\theta_0$
On a alors $b^2 = \sin^2\theta_0$, si $b \geq 0$ alors $\theta = \theta_0$ convient sinon $\theta = -\theta_0$ convient.

L'application
$$\begin{aligned} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\longrightarrow SO_2 \\ \theta &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le choix d'une orientation définit une bijection entre rotations et $SO(2,\mathbb{R})$
On a également une bijection entre angles et rotations.

Corollaire Le choix d'orientation définit une bijection entre les angles et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Déf. soit $u, v \in E$. L'angle orienté θ entre u et v est l'unique $\bar{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ← classe mod $2\pi\mathbb{Z}$ t.q. la rotation
la rotation envoyant $\frac{u}{\|u\|}$ dans $\frac{v}{\|v\|}$

est r_θ. On note $\bar{\theta} = (\widehat{u, v})$

Si on choisi $\theta \in]-\pi, \pi]$ on dit que θ est la mesure principal de l'angle $(\widehat{u, v})$.

Prop. Soit $\bar{\theta} = \langle \widehat{a, b} \rangle$ et θ un représentant de cette classe.

Alors i) $\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos\theta$

La matrice des colonnes a pour dét :

ii) $[a, b] = \det_{\mathcal{B}_0}(a, b) = \|a\| \|b\| \sin\theta$

Preuve : soit $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2\}$ si

$u = x e_1 + y e_2$

i) $r_\theta(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= (\cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y) e_1 + (\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y) e_2$

et $\langle r_\theta(u), u \rangle = (\cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y) \cdot x + (\sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y) \cdot y$

$= \cos\theta (x^2 + y^2) = \|u\| \, \|r_\theta(u)\|$

$x^2 + y^2 = \|u\|^2 = \|u\| \cdot \|r_\theta(u)\|$

donc $\langle \widehat{a, b} \rangle = \|a\| \|b\| \cos\theta$.

ii) $[u, r_\theta(u)] = \det(u, r_\theta(u))$

$$\doteq \det \begin{pmatrix} x & \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ y & \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix}$$

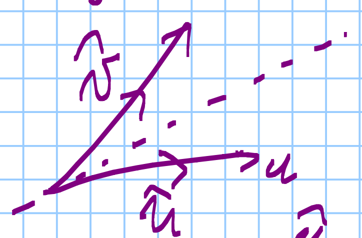
$$= \sin\theta\,(x^2+y^2) = \|u\| \cdot \|r_\theta(u)\| \cdot \sin\theta$$

$$[a,b] = \|a\|\|b\| \left[\frac{a}{\|a\|}, r\left(\frac{a}{\|a\|}\right)\right] = \|a\|\cdot\|b\|\sin\theta$$

On définit les angles non-orienté comme les classes d'équivalences des couples de vecteurs non nuls pour la relation :

$$(\widehat{u,v}) \sim_{NV} (\widehat{u',v'}) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$$
$$\exists \varphi \in O(P)$$
$$u' = \lambda\varphi(u),\ v' = \mu\varphi(v)$$

Exo $(\widehat{u,v})$ et $(\widehat{v,u})$ définisse le même angle non-orienté $\hat u = \frac{u}{\|u\|}$, $\hat v = \frac{v}{\|v\|}$



$$\varphi = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\hat u$ – Normé, $\hat v$ - normé

$\hat u \leftrightarrow \hat v$

On définit aussi les angles orientés de droites comme classes d'équivalences de couples de vecteurs non-nuls pour le relation :

$$(\widehat{u,v}) \sim_{OD} (\widehat{u',v'}) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$$
$$\exists \varphi \in SO(P),\ u' = \lambda\varphi(u) \text{ et } v' = \mu\varphi(v)$$

Théorème $x, y, x', y', z \in E$ non nul $\lambda \in \mathbb{R}$

alors on a

(1) $(\widehat{\lambda x, \lambda y}) = (\widehat{x, y})$

(2) x, y sont liés ssi $(\widehat{x, y}) \in \{\bar{0}, \bar{\pi}\}$

(3) $(\widehat{x, y}) + (\widehat{y, z}) = (\widehat{x, z})$ (relation de Chasles)

(4) $(\widehat{y, x}) = -(\widehat{x, y})$

(5) $(\widehat{x, y}) = (\widehat{x', y'}) \iff (\widehat{x, x'}) = (\widehat{y, y'})$

(6) $\forall u \in SO(E)$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

(rotations conservent les angles orientés)

Preuve 1) Soit $\bar{\theta}$ t.q. $r_\theta(\lambda x) = \lambda y$

$\iff \lambda r_\theta(x) = \lambda y \Rightarrow r_\theta(x) = y$

2) Si $x = ky$ on a $\langle x, y \rangle = k \langle y, y \rangle$

mais aussi : alors

$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$ $\quad \cos\theta = \dfrac{k\|y\|^2}{\|x\|\|y\|} = \dfrac{k\|y\|^2}{\|ky\|\|y\|} = \dfrac{k}{|k|} = \pm 1$

$\Rightarrow \theta \in \{\bar{0}, \bar{\pi}\}$

3) Soit $\bar{\theta}, \bar{\theta}'$ t.q. $r_\theta(x) = y$ et $r_{\theta'}(y) = z$

Alors $r_{\theta'} \cdot r_\theta(x) = z = r_{\theta + \theta'}(x)$

4) On prend $z = x$ pour obtenir $\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = 0$

5) $(\widehat{x, x'}) + (\widehat{x', y'}) = (\widehat{x, y'}) = (\widehat{x, y}) + (\widehat{y, y'})$ et alors

$(\widehat{x, x'}) - \langle y, y' \rangle = (\widehat{x, y}) - (\widehat{x', y'})$

6) Soit $\bar{\theta}$ t.q. $r_\theta(x) = y$, on a $r_\theta(u(x)) = u(r_\theta(x)) = u(y)$

d'où $\bar{\theta} = (\widehat{u(x), u(y)})$ Dans un plan rotations commutent et u est une rotation aussi.

En dim 3

angles orienté et non orientés.

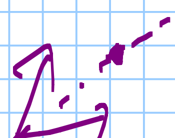
Mimons la déf. de dim 2.

Un angle orienté (resp. non-orienté) les équiv. de couples de vect. non-nuls pour la relation $\sim_{OV}$ (resp. $\sim_{NV}$)

$(\widehat{u,v}) \sim_{OV} (\widehat{u',v'}) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$
$\exists \varphi \in O(P),\ u' = \lambda \varphi(u)$ et $v' = \mu \varphi(v)$

$(\widehat{u,v}) \sim_{OD} (\widehat{u',v'}) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$
$\exists \varphi \in SO(P),\ u' = \lambda \varphi(u)$ et $v' = \mu \varphi(v)$

Lemme (i) Étant donné $u, v \in E$ $\|u\| = \|v\| = 1$ la rotation d'axe dirigé par $u+v/2$ et d'angle π permute u et v



(ii) Les relations $\sim_{OV}$ et $\sim_{NV}$ coïncident.

On ne peut plus identifier angles et rotations.

4.5. Produit mixte et produit vectoriel

$E = \mathbb{R}^3$

On choisi une orientation donnée par une base $\mathcal{B}_0$ declarée directe

(a) Première version (en coordonnées)

Pour $v, v' \in E$ ~~de~~ de coord. resp. (x, y, z) et (x', y', z') dans E on note $v \wedge v'$ rect. ayant pour coord.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

(b) Deuxième version (géométrique)

Le produit vect. a des propriétés suivantes :

- $v \wedge v' \in \mathrm{Vect}(v, v')^{\perp}$
- $\|v \wedge v'\| = |\sin(\widehat{v, v'})| \cdot \|v\| \cdot \|v'\|$

ne dépend pas d'orientation

$(\widehat{v, v'})$ - l'angle dans le plan $\mathrm{Vect}(v, v')$

- La famille $(v, v', v \wedge v')$ est une base directe si v et v' ne sont pas colinéaire (et $v \wedge v' = 0$ si v et v' sont colin.

(c) <u>Produit mixte</u> Etant donné trois vecteurs $(v, v', w) \in E^3$ (l'ordre compte) et deux base orthonormées directes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ on a

$$\det_{\mathcal{B}}(v, v', w) = \det_{\mathcal{B}'}(v, v', w)$$

En effet. Notons A (resp A') la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de v, v', w dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$)

Notons $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice de changement de base, comme deux bases sont supposées orthonormées directes, le dét $P = 1$ De plus $A = PA'$ donc dét A = dét A'

<u>Définition</u> le produit mixte de trois vecteurs $(v, v', w) \in E^3$ est le déterminant de ces vecteurs dans n'importe quelle base orthonormée directe. On le note $[v, v', w]$

c'est une application tri-linéaire et alternée.

(d) troisième version (algébrique)

On fixe toujours une base orthonormée directe $\mathcal{B}$.

Pour $v, v' \in E$ on considère la forme linéaire $E \to \mathbb{R}$

$$w \longmapsto [v, v', w]$$

Elle est necessairement de la forme "produit scalaire avec un vecteur" i.e. il existe un unique vecteur noté $v \wedge v'$ t.q. $\forall (v, v', w) \in E^3$

$$[v, v', w] = \langle v \wedge v', w \rangle$$

C'est le même produit vect. qu'avant

Cette version permet de généralise en esp. euclid. de dim n:

Etant donné $n-1$ vecteurs on fabrique un nouveau - leur produit vectoriel.

Reconnaissance des isométries de $\mathbb{R}^3$

Si on a une matrice $A \in O(\mathbb{R}, 3)$ d'une isométrie $\varphi : E \to E$ $(E = \mathbb{R}^3)$

1) Son dét $= \varepsilon$ $(+1$ ou $-1)$

2) On cherche alors un vecteur

propre v_1 de valeur propre ε

3) Reste à déterminer l'angle de rotation autour de droite dirigé par ε. On a $\operatorname{tr} A = \varepsilon + 2\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \operatorname{tr} A - \varepsilon$

$\Rightarrow$ on trouve θ à signe près (et à 2π près)

4) Pour déterminer le signe de θ on choisit un vecteur v_2 orthogonal à v_1, on calcule le produit vectoriel $v_2 \wedge \varphi(v_2)$, puis le produit mixte $\langle v_2 \wedge \varphi(v_2), v_1 \rangle = p$

Le signe de ce produit est exactement le signe de θ
