Algèbre IV. Partie des cours 2-3 de 1 et 8 février.

à propos de procédé de Gram-Schmidt d'orthogonalisation d'une base.

Soit $F = \mathrm{Vect}\{f_1, \dots, f_m\}$ où $f_1, \dots f_m$ est une famille libre

Construction d'une base $\{e_1, \dots e_m\}$ telle que $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$

- On pose $\boxed{e_1 = f_1}$
- On pose $e_2 = f_2 + \lambda_1 e_1$ et on cherche λ_1 t.q. $\langle e_2 | e_1 \rangle = 0$ alors

$$0 = \langle e_2 | e_1 \rangle = \langle f_2 + \lambda_1 e_1 | e_1 \rangle$$
$$= \langle f_2 | e_1 \rangle + \lambda_1 \langle e_1 | e_1 \rangle$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\dfrac{\langle f_2 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle}$ et on a $\boxed{e_2 = f_2 - \dfrac{\langle f_2 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} e_1}$

- On pose $e_3 = f_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$ et on cherche μ_1 et μ_2 t.q.

(1) $0 = \langle e_3 | e_1 \rangle$

$$= \langle f_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 | e_1 \rangle = \langle f_3 | e_1 \rangle + \mu_1 \langle e_1 | e_1 \rangle$$
$$+ \mu_2 \cancelto{0}{\langle e_2 | e_1 \rangle} = \langle f_3 | e_1 \rangle + \mu_1 \langle e_1 | e_1 \rangle \Rightarrow \mu_1 = -\frac{\langle f_3 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle}$$

(2) $0 = \langle e_3 | e_2 \rangle$

$$= \langle f_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 | e_2 \rangle = \langle f_3 | e_2 \rangle + \cancelto{0}{\mu_1 \langle e_1 | e_2 \rangle}$$
$$+ \mu_2 \langle e_2 | e_2 \rangle = \langle f_3 | e_2 \rangle - \mu_2 \langle e_2 | e_2 \rangle$$

$\Rightarrow \mu_2 = \dfrac{\langle f_3 | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle}$ et on a

$$\boxed{e_3 = f_3 - \frac{\langle f_3 | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle f_3 | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2 \rangle} e_2}$$

et ainsi de suite on a

$$\boxed{e_k = f_k - \frac{\langle f_k | e_1 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle f_k | e_2 \rangle}{\langle e_2 | e_2} e_2 - \dots - \frac{\langle f_k | e_{k-1} \rangle}{\langle e_{k-1} | e_{k-1} \rangle} e_k}$$

Montrons que $\{e_1, \dots, e_m\}$ construit ainsi est une famille libre et (et par consequent une base de F)

Puisque $\{f_1, \dots, f_m\}$ est libre montrons que $\{e_1, \dots e_m\}$ l'est aussi

Par recurrence :

$\mathcal{P}(k)$: $\{e_1, \dots, e_k\}$ est libre

(I) $\mathcal{P}(1)$ $e_1 = f_1 \neq 0$ donc $\{e_1\}$ est libre

(R) hypothèse $\mathcal{P}(k-1)$: $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ est libre. Montrons que $\{e_1, \dots e_k\}$ est libre. On remarque que

$$e_k = f_k + a_1 e_1 + \dots + a_{k-1} e_{k-1}$$

On veut m.q. si

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k = 0$$

alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$

- Supposons que $\alpha_k = 0$ alors cela

implique que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{k-1} e_{k-1} = 0$
ce qui par $P(k-1)$ implique que
$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1}$ et la famille
$\{e_1, \dots, e_{k-1}, e_k\}$ est libre

- supposons que $\alpha_k \neq 0$

Puisque tout $e_1, \dots, e_{k-1}$ sont des combinaisons linéaires de $f_1, \dots, f_{k-1}$ on peut réécrire l'expression

$0 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{k-1} e_{k-1} + \alpha_k e_k$ comme la somme d'une combinaison linéaire de $\{f_1, \dots f_{k-1}\}$, notons la $L(f_1 \dots f_{k-1})$, et de $\alpha_k \cdot f_k$.

Donc si $\alpha_k \neq 0$ on aura $\alpha_k f_k + L(f_1, \dots f_{k-1}) = 0$
Ce qui contredit l'enoncé que $\{f_1, \dots f_{k-1}, f_k\}$ est une famille libre.
absurde.

On conclut que la famille

$$\{e_1, e_2, \dots, e_m\} \text{ est libre.}$$

Independement de la façon de la construction on a une

<u>Proposition</u>: Toute famille de vecteurs non-nuls orthogonaux deux-à-deux est libre.

Exemples Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

1. $E = \mathbb{R}^3$ produit scalaire usuel

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ plan

Gram-Schmidt : base orthogonale de F

$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = v_2 - \dfrac{\langle f_1 | v_2 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1$, $\|f_1\|^2 = \langle f_1 | f_1 \rangle = 2$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

On remarque que F est engendré par deux vecteurs. C'est un plan dans ce plan on prend v_1 et on choisi dans ce plan un vect f_2 orthogonal au v_1.

Si on cherche à compléter une base $\{f_1, f_2\}$ par un troisième vecteur orthogonal à f_1 et f_2 pour obtenir une base orthogonale de E il suffit de choisir un vecteur v_3 qui n'est pas

dans F et procédé à son orthogonalisation. Par exemple on remarque que $v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin F$

$\left(\text{évident que } \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \neq a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right)$

avec $a, b \in \mathbb{R}$

donc $f_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\langle v | f_1\rangle}{\langle f_1 | f_1\rangle} f_1 - \frac{\langle v | f_2\rangle}{\langle f_2 | f_2\rangle} f_2$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}_{=\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1/2\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\right\rangle}{\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1/2\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix}\right\rangle}_{=1/2}} \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\\-\frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

2. Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, polynôme de dég ≤ 2.

Produit scalaire : $\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$

Vecteur $1, t, t^2$ définis une base de E

Orthogonalisation.

$e_1 = 1$, $e_2 = t + \alpha \cdot 1$

$$0 = \langle t + \alpha \cdot 1 \mid 1 \rangle = \int_{-1}^{1} (t+\alpha) \cdot 1 \, dt = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow e_2 = t$$

$$e_3 = t^2 + \beta t + \gamma \cdot 1$$

$$0 = \langle t^2 + \beta t + \gamma \cdot 1 \mid 1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 + \quad + \gamma \, dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{3}$$

$$0 = \langle t^2 + \beta t + \gamma \cdot \underbrace{1 \mid t}_{0} \rangle = \int_{-1}^{1} t^3 + \beta t^2 \, dt$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1}}_{=0} + \beta \left[t^3\right]_{-1}^{1} \Rightarrow \beta = 0$$

Si on divise encore chaque vect. par sa norme $\rightsquigarrow$ base orthonormée.

3. Espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

Base $1, t, t^2, \dots t^{n-1} \rightsquigarrow 1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5} t, \dots$

à une multipl. par des const près

Ce sont de polynômes de Legendre qui forment une base ortogonale:

$$\frac{1}{2^k \cdot k!} \frac{d^k (t^2 - 1)^k}{dt^k}$$