Université Claude Bernard (Lyon 1) Printemps 2017-2018
UE Math IV Algèbre L2 23 mars 2018

EXAMEN MI-PARCOURS
Durée : 2 heures. Aucun document n'est autorisé

Les parties A et B sont independantes et doivent être rédigées sur les copies différentes. Il y aura deux notes de l'examen - Partie A et Partie B.

Partie A :

Exercice 1. Produit scalaire

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère la fonction f qui aux vecteurs $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, associe le réel $f(u,v) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$.

1. Montrer que f munit $\mathbb{R}^3$ d'une structure euclidienne.
2. Quelle est, dans la base canonique, la matrice de produit scalaire donné par f ?
3. Former, par la méthode de Gram-Schmidt, une base orthonormée $\{q_1, q_2, q_3\}$ par rapport à f à partir de la base canonique $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
4. Quelle est la matrice Q, tel que $q_1 = Qe_1,\ q_2 = Qe_2$ et $q_3 = Qe_3$?
5. Quelle est la matrice de f dans la base $\{q_1, q_2, q_3\}$?

Exercice 2. Cauchy-Schwarz

1. Quelle est l'expression $N(x,y)$ dans l'enoncé suivant du théorème de Cauchy-Schwarz :

   Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace vectoriel euclidien. Alors pour tout x, y de E on a une inégalité
   $$< x, y > \leq N(x,y).$$
2. Quelle est la condition sur x et y pour que $< x, y >$ soit égale à $N(x,y)$. La démontrer.
3. On veut montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité
   $$\sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta \leq 2.$$
   Pour cela peut-on voir la partie gauche comme $< x, y >$ avec $x, y \in \mathbb{R}^3$ judicieusement choisis ? Finir l'argument en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Partie B :

Exercice 3. Sous-espaces orthogonaux

Soit $E = \mathbb{R}^3$ - l'espace euclidien avec la base canonique (e_1, e_2, e_3). On munit E du produit scalaire standard donné par

$$< X, Y >= {}^tX \cdot Y == x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

où (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) sont les coordonnées des vecteurs X et Y respectivement.
On considère trois vecteurs U, V et W de coordonnées respectives $(1, 2, -2)$, $(1, -1, 4)$ et $(1, 2, 7)$.

1. Soient F le sous-espace engendré par les vecteurs U et V. Trouver une base orthonormée de F dont le premier vecteur est colinéaire à U.

2. En utilisant le vecteur W completer la base orthonormée de F en une base orthonormée de E.

3. Quelle est la projection du vecteur W sur l'espace F ?

4. Quelle est la distance du point $(1, 2, 7)$ au sous-espace F ?

5. Calculer la projection orthogonale des vecteurs de la base canonique sur F. En déduire la matrice A de la projection orthogonale p_F de E sur le sous-espace F dans la base canonique.

6. Quels sont le noyau et l'image de p_F ?

7. Trouver une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de p_F est donnée par une matrice diagonale avec des 1 et 0 sur la diagonale.

8. Quelle est la matrice de passage M de la base canonique à la base $\mathcal{B}$?

9. Montrer que si dans une matrice les vecteurs-colonnes forment une base orthonormale alors c'est la matrice d'un endomorphisme orthogonal.

10. En déduire sans calcul que $M^{-1} = {}^tM$.